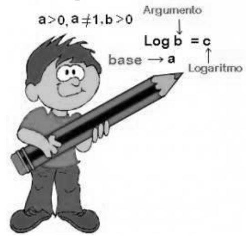
Una razón de por qué estudiar logaritmos

CURSO	:	2º Medio A – B – C – D
SECTOR	:	Matemática
CONTENIDO	:	Logaritmos
PROFESOR	:	Fernando Pavez Peñaloza



Piensa y calcula

a) $10^3 = x$ b) $10^x = 1.000.000$ c) $x^2 = 100$ d) $x^1 = 10$ e) $10^x = 1$ f) $10^x = 0{,}0001$ g) $0{,}1^x = 100$

Según la Real Academia de la Lengua española, la palabra *logaritmo* proviene del griego λογοχ, razón, y αριβμοχ, número.
Su significado es Exponente a que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado. El empleo de los **logaritmos** simplifica los procedimientos del cálculo aritmético.

Napier y Briggs

John NAPIER (escrito también NEPER) nació en 1550. Procedente de la baja nobleza escocesa, mostró toda su vida un espíritu curioso y dinámico, a pesar de una vida alejada de los centros culturales de la época. La introducción de los logaritmos es uno de sus aportes, de él heredamos los logaritmos naturales (en base "e", cuyo símbolo es ln)

Mientras tanto, un eminente matemático de Londres, Henry BRIGGS, había descubierto la importancia de estos trabajos y viajó a Escocia para encontrarse con el autor. Retomando la idea fundamental, pero considerando una progresión geométrica simple, la de las potencias de 10, publica en 1617 una primera tabla, con 8 decimales. El logaritmo de un número x es por lo tanto definido como el exponente n de 10, tal que x sea igual a 10 elevado a n.

¿Qué problema motivó la invención de los logaritmos?

En diversas ciencias, tales como la Astronomía, Química, Biología, etc., se necesita a menudo realizar cálculos que involucran cantidades extremadamente grandes o pequeñas, que resultan ser muy tediosos.

Siglos atrás no existían las calculadoras, por lo tanto, los cálculos eran engorrosos y tomaban demasiado tiempo. Para facilitar estas operaciones existían unas "tablas" de logaritmos, por ejemplo, parte de una de ellas es la siguiente:

(Henry Briggs)

TABLA DE LOGARITMOS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010

(Extraída de Curso de Matemáticas Elementales I, Álgebra, Carlos Mercado, 1974)

Ejemplo de cálculo mediante tablas

Consideremos el siguiente cálculo (no olvidemos que siglos atrás se realizaba sin calculadora):

$$\frac{371 \cdot \sqrt{22{,}8}}{1{,}76^3}$$

La estrategia consistía en escribir cada uno de los números en base 10:

En la actualidad usando una calculadora científica, en pocos segundos podemos calcular el valor de la expresión $\frac{371 \cdot \sqrt{22{,}8}}{1{,}76^3} \approx 325$

- Para 371 debemos buscar un número "x" de modo que $10^x = 371$
  Como 371 es mayor que 100 y menor que 1.000, entonces el exponente "x" debe estar comprendido entre 2 y 3, por lo tanto x = 2,…
  La parte decimal se busca en la tabla anterior, para esto se ubica 37 en la primera columna encabezada por N y en la columna encabezada por 1, frente a 37 se encuentra la parte decimal.
  Así $x \approx 2{,}5694$

- Del mismo modo, supongamos que: $10^y = 22{,}8$ $10^z = 1{,}76$
  De la tabla anterior se deduce que: $y \approx 1{,}3579$ $z \approx 0{,}2455$

- Cada uno de estos números ahora se puede representar como:

  $371 \approx 10^{2{,}5694}$ $22{,}8 \approx 10^{1{,}3579}$ $1{,}76 \approx 10^{0{,}2455}$

- El cálculo se puede transformar a potencias de base 10:

$$\frac{371 \cdot \sqrt{22{,}8}}{1{,}76^3} = \frac{10^{2{,}5694} \cdot \sqrt{10^{1{,}3579}}}{\left(10^{0{,}2455}\right)^3} = \frac{10^{2{,}5694} \cdot 10^{\frac{1{,}3579}{2}}}{\left(10^{0{,}2455}\right)^3} = 10^{2{,}5694 + \frac{1{,}3579}{2} - 0{,}7365} = 10^{2{,}5119}$$

Para determinar el valor de la expresión $\frac{371 \cdot \sqrt{22{,}8}}{1{,}76^3}$, volvemos a la tabla de logaritmos decimales de Briggs, y la parte decimal del exponente de la potencia $10^{2{,}5119}$, es decir, 5119, le corresponde una ubicación tal como se indica en la siguiente figura:

TABLA DE LOGARITMOS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428

Observamos que a 5119 le corresponden las cifras 32 horizontal y 5 vertical. Como la parte entera de la potencia $10^{2{,}5119}$ es 2, nos señala que el resultado debe estar comprendido entre 100 y 1000, por lo tanto, el número buscado es 325.

Simbología

$\log_b x = y$

Se lee *"logaritmo de x en base b"*

"b" es la base
"x" es el argumento
"y" es el logaritmo

(logaritmo decimal)

$\log_{10} x = \log x$

(Logaritmo natural)

$\log_e x = \ln x$

Concepto de Logaritmo Decimal

Considerando los valores del ejemplo anterior:

Potencia	Significado del exponente	Notación
$371 = 10^{2{,}5694}$	2,5694 es logaritmo de 371 en base 10	$\log_{10} 371 = 2{,}5694$
$22{,}8 = 10^{1{,}3579}$	1,3579 es logaritmo de 371 en base 10	$\log_{10} 22{,}8 = 1{,}3579$
$1{,}76 = 10^{0{,}2455}$	0,2455 es logaritmo de 371 en base 10	$\log_{10} 1{,}76 = 0{,}2455$

Ejemplo

Calcular el valor de $\dfrac{2{,}7^7 \bullet 8{,}67}{\sqrt[3]{712}}$ utilizando el método descrito en la sección anterior, pero en vez de las tablas use una calculadora científica.

Desarrollo

$2{,}7 = 10^x$ $\qquad$ $8{,}67 = 10^y$ $\qquad$ $712 = 10^w$

Utilizando en la calculadora la función logaritmo y aproximando a 4 decimales, obtenemos:

log	2,7	=	**0,43136...**

log	8,67	=	**0,93801...**

log	712	=	**2,85247...**

$x \approx 0{,}4314$ $\qquad$ $y \approx 0{,}9380$ $\qquad$ $w \approx 2{,}8525$

Reemplazando las potencias de 10 en la expresión original y aplicando las propiedades de potencias se tiene:

PROPIEDADES

1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
2) $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
3) $\left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}$

$$\frac{\left(10^{0,4314}\right)^7 \bullet 10^{0,9380}}{\sqrt[3]{10^{2,8525}}} = \frac{10^{3,0198} \bullet 10^{0,9380}}{10^{\frac{2,8525}{3}}} = \frac{10^{3,0198+0,9380}}{10^{0,9508}} = \frac{10^{3,9578}}{10^{0,9508}} = 10^{3,9578-0,9508} = 10^{3,007}$$

Utilizando la función inversa de logaritmo en la calculadora se tiene que:

SHIFT	**log**	3,007	=	**1.016,2486...**

Aproximando a dos decimales:

$$\frac{\left(10^{0,4314}\right)^7 \bullet 10^{0,9380}}{\sqrt[3]{10^{2,8525}}} = 1.016{,}25$$

Reflexionando

Si utilizamos una calculadora científica para determinar el valor de la expresión $\dfrac{\left(10^{0,4314}\right)^7 \bullet 10^{0,9380}}{\sqrt[3]{10^{2,8525}}}$:

a) ¿Cuánto tiempo toma realizar este cálculo?
b) ¿Con cuántos decimales podemos aproximar este resultado?
c) ¿Cómo ha contribuido el desarrollo de la tecnología al desarrollo de la Matemática?

Aplica la teoría

1) Usando una calculadora científica y aproximando el resultado a 4 decimales, encuentra el valor del exponente de cada potencia de 10 de modo que se cumpla la igualdad:

a) $485 = 10^x$
b) $0{,}72 = 10^y$
c) $0{,}00001 = 10^w$
d) $5 = 10^m$
e) $586 = 10^x$
f) $55 = 10^t$
g) $0{,}25 = 10^y$
h) $0{,}02 = 10^x$

2) Usando una calculadora científica y aproximando el resultado a 4 decimales, encuentra el valor del exponente de cada potencia de 10 de modo que se cumpla la igualdad:

a) $4{,}63 = e^x$
b) $0{,}112 = e^y$
c) $0{,}003 = e^w$
d) $14 = e^m$
e) $875 = e^x$
f) $34 = e^t$
g) $0{,}125 = e^y$
h) $0{,}003 = e^x$

3) Calcular el valor de cada expresión usando una calculadora científica y aproximando el resultado a 4 decimales (puedes usar base 10 ó e):

a) $\dfrac{53 \bullet \sqrt[5]{37}}{0{,}2^6}$

b) $\left(5{,}78^{-3} \bullet \sqrt{1064}\right)^{-7}$

c) $\sqrt{\dfrac{8{,}43^5}{6{,}4^{-7}}}$

d) $\dfrac{5.876.546^3 \bullet \sqrt{0{,}0000067}}{343^3}$

e) $\sqrt[5]{0{,}0000325^{-7} \bullet 47^5}$

f) $\dfrac{5.896^3 \bullet 0{,}256^2}{72{,}5^4 \bullet \sqrt[3]{6.852^2}}$

g) $\sqrt{\dfrac{624^3 \bullet \sqrt{2{,}56^7}}{8{,}75^9}}$