¿Por qué $\sqrt{2}$ no es número racional?

La pregunta anterior se puede traducir como: ¿por qué $\sqrt{2}$ no se puede expresar como una fracción?

En esta clase demostraremos que $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no podemos expresarla como una fracción.

Resultados preliminares

Con respecto a la PARIDAD de un número entero (par o impar), podemos concluir lo siguiente:

1) $(impar)^2 = (impar) \cdot (impar) = impar.$
2) $(par)^2 = (par) \cdot (par) = par.$
3) $(par)^2$ es un múltiplo de 4.
4) Las únicas posibilidades que pueden darse en una fracción son las siguientes:

$$\frac{impar}{impar}, \frac{impar}{par}, \frac{par}{impar} \text{ y } \frac{par}{par}.$$

La opción $\frac{par}{par}$ se puede reducir a alguna de las otras tres, se puede simplificar por 2, por lo que no es necesario considerarla.

Demostración

Supongamos que $\sqrt{2}$ se puede escribir como una fracción. Entonces, con respecto a la paridad de los términos de la fracción, se presentan los siguientes casos:

Caso 1

$\sqrt{2} = \frac{impar}{impar}$	Supongamos que $\sqrt{2}$ se puede representar con una fracción con términos impares.
$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{impar}{impar}\right)^2$	Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad.
$2 = \frac{impar}{impar}$	Impar por impar es número impar.
$2 \cdot (impar) = impar$	Efectuamos el producto cruzado de los términos de la proporción.
$par = impar$	¡Situación imposible!
Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no se puede representar como una fracción con términos impares.	

Caso 2

$\sqrt{2} = \frac{impar}{par}$	Supongamos que $\sqrt{2}$ se puede expresar como una fracción en donde el numerador es impar y el denominador es par.
$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{impar}{par}\right)^2$	Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad.
$2 = \frac{impar}{par}$	Impar por impar es número impar y un par por par es par.
$2 \cdot (par) = impar$	Efectuamos el producto cruzado de los términos de la proporción.
$par = impar$	¡Situación imposible!
En consecuencia, $\sqrt{2}$ tampoco se puede expresar como una fracción con numerador impar y el denominador par.	

Caso 3

$\sqrt{2} = \frac{par}{impar}$	Supongamos que $\sqrt{2}$ se puede escribir como una fracción de numerador par y denominador es impar.
$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{par}{impar}\right)^2$	Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad.
$2 = \frac{par\ múltiplo\ de\ 4}{impar}$	Par por par es múltiplo de 4 e impar por impar es número impar.
$2 \cdot (impar) = par\ múltiplo\ de\ 4$	Efectuamos el producto cruzado de los términos de la proporción.
$2 \cdot (impar) = 4 \cdot (número\ par\ o\ impar)$	Un múltiplo de 4 se puede expresar como 4 por un número par o impar.
$(impar) = 2 \cdot (número\ par\ o\ impar)$	Dividendo por 2 ambos miembros de la igualdad.
$impar = par$	¡Situación imposible!
En consecuencia, $\sqrt{2}$ no se puede escribir con una fracción con numerador par y el denominador impar.	

Conclusión final

$\sqrt{2}$ no es posible representarla como una fracción, es decir, no es un número racional. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional.