



Programa de Estudio

MATEMÁTICA 8° BÁSICO

**MINISTERIO DE EDUCACIÓN
UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN
JUNIO 2011**

**MINISTERIO DE EDUCACIÓN
UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN
JUNIO 2011**

ÍNDICE

PRESENTACIÓN	5
Nociones básicas	7
Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes	7
Objetivos Fundamentales Transversales	9
Mapas de Progreso	10
Consideraciones generales para implementar el programa	12
Orientaciones para planificar	14
Orientaciones para evaluar	17
MATEMÁTICA	20
Propósitos	21
Habilidades	22
Orientaciones Didácticas	23
VISIÓN GLOBAL DEL AÑO	25
Semestre 1	27
Unidad 1. Números y álgebra	28
Unidad 2. Geometría	35
Semestre 2	46
Unidad 3. Datos y azar	47
Unidad 4. Álgebra	58
MATERIAL DE APOYO SUGERIDO	63
Anexos:	
Anexo 1: Uso flexible de otros instrumentos curriculares	67
Anexo 2: Objetivos Fundamentales por semestre y unidad	68
Anexo 3: Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad	69
Anexo 4: Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)	71

PRESENTACIÓN

El programa es una propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos

El programa de estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta tiene como propósito promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el Marco Curricular¹.

La ley dispone que cada establecimiento pueda elaborar sus propios programas de estudio, previa aprobación de los mismos por parte del Mineduc. El presente programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con programas propios.

Los principales componentes que conforman la propuesta del programa son:

- Una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y CMO del Marco Curricular, lo que se expresa a través de los *Aprendizajes Esperados*².
- Una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades.
- Una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, presentada a modo de sugerencia.

De manera adicional a estos componentes, se presenta un conjunto de elementos que se entregan con la finalidad de orientar el trabajo pedagógico realizado a partir del programa y promover el logro de los objetivos que este propone.

La totalidad de los elementos que componen el programa incluyen lo siguiente:

- *Nociones básicas*. Esta sección presenta conceptos fundamentales que están en la base del Marco Curricular y, a la vez, presenta una visión general acerca de la función de los Mapas de Progreso.
- *Consideraciones generales para implementar el programa*. Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el programa y organizar el trabajo en torno al mismo.
- *Propósitos, habilidades y orientaciones didácticas*. Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas relevantes para implementar el programa en el sector.

¹ Decretos supremos 254 y 256 de 2009.

² En algunos casos estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del Marco Curricular. Esto ocurre cuando estos OF pueden ser desarrollados de manera íntegra en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

- *Visión global del año.* Presenta la totalidad de Aprendizajes Esperados a desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades.
- *Unidades.* Junto con especificar los Aprendizajes Esperados propios de la unidad, incluyen indicadores de evaluación y sugerencias de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes.
- *Relaciones interdisciplinarias ®.* Se simbolizan con ® las actividades que relacionan dos o más sectores.
- *Instrumentos y ejemplos de evaluación.* Ilustran formas de apreciar el logro de los Aprendizajes Esperados presentando estrategias diversas que pueden ser utilizadas para este fin.
- *Material de apoyo sugerido.* Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden ser utilizados para promover los aprendizajes del sector, distinguiendo entre aquellos para ser consultados por el docente de los que pueden ser utilizados por los estudiantes.

NOCIONES BÁSICAS

1. Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes

Habilidades, conocimientos y actitudes...

Los aprendizajes que promueven el Marco Curricular y los programas de estudio apuntan a un desarrollo integral de los estudiantes. Para tales efectos, esos aprendizajes involucran tanto los conocimientos propios de la disciplina como las habilidades y actitudes.

...movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos...

Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno. Esto supone orientarlos hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de dichos elementos para realizar de manera efectiva una acción determinada.

...y que se desarrollan de manera integrada

Se trata una noción de aprendizaje de acuerdo con la cual los conocimientos, las habilidades y las actitudes se desarrollan de manera integrada y, a la vez, se enriquecen y potencian de forma recíproca.

Deben promoverse de manera sistemática

Las habilidades, los conocimientos y las actitudes no se adquieren espontáneamente al estudiar las disciplinas. Requieren promoverse de manera metódica y estar explícitas en los propósitos que articulan el trabajo de los docentes.

Habilidades

Son importantes, porque...

Son fundamentales en el actual contexto social

...el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles y adquirir y generar nuevos conocimientos.

Esta situación hace relevante la promoción de diversas habilidades, como resolver problemas, formular conjeturas, realizar cálculos en forma mental y escrita y verificar proposiciones simples, entre otras.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque...

Permiten poner en juego los conocimientos

...sin esas habilidades, los conocimientos y conceptos que puedan adquirir los alumnos resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos.

Conocimientos

Son importantes, porque...

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno

...los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de los estudiantes sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que han obtenido por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Además, estos conceptos son fundamentales para que los alumnos construyan nuevos.

Por ejemplo, si se observa una información en un diario que contenga datos representados en tablas o gráficos, el estudiante utiliza sus conocimientos sobre estadística para interpretar a esa información. Los conocimientos previos le capacitan para predecir sobre lo que va a leer para luego verificar sus predicciones en la medida que entiende la información y así construir este nuevo conocimiento.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque...

Son una base para el desarrollo de habilidades

...son una condición para el progreso de las habilidades. Ellas no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos.

Actitudes

Son importantes, porque...

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación

...los aprendizajes no involucran únicamente la dimensión cognitiva. Siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de los alumnos. Entre los propósitos establecidos para la educación, se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Ellos incluyen aspectos de carácter afectivo y, a la vez, ciertas disposiciones.

A modo de ejemplo, los aprendizajes de Matemática involucran actitudes como perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos, trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos y respeto por ideas distintas a las propias.

Se deben enseñar de manera integrada, porque...

Son enriquecidas por los conocimientos y las habilidades

...en muchos casos requieren de los conocimientos y las habilidades para su desarrollo. Esos conocimientos y habilidades entregan herramientas para elaborar juicios informados, analizar críticamente diversas circunstancias y contrastar criterios y decisiones, entre otros aspectos involucrados en este proceso.

Orientan la forma de usar los conocimientos y las habilidades

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada alumno otorgue a los conocimientos y las habilidades adquiridos. Son, por lo tanto, un antecedente necesario para usar constructivamente estos elementos.

2. Objetivos Fundamentales Transversales (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum...

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro.

...que deben promoverse en toda la experiencia escolar

Los OFT no se logran a través de un sector de aprendizaje en particular; conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse a través de las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, la práctica docente, el clima organizacional, la disciplina o las ceremonias escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes

No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores. Supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Se organizan en una matriz común para educación básica y media

A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la Educación Básica y la Educación Media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal, desarrollo del pensamiento, formación ética, la persona y su entorno y tecnologías de la información y la comunicación.



3. Mapas de Progreso

Describen sintéticamente cómo progresa el aprendizaje...

Son descripciones generales que señalan cómo progresan habitualmente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. A partir de esto, ofrecen una visión panorámica sobre la progresión del aprendizaje en los doce años de escolaridad³.

...de manera congruente con el Marco Curricular y los programas de estudio

Los Mapas de Progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el Marco Curricular y los programas de estudio. El avance que describen expresa de manera más gruesa y sintética los aprendizajes que esos dos instrumentos establecen y, por lo tanto, se inscribe dentro de lo que se plantea en ellos. Su particularidad consiste en que entregan una visión de conjunto sobre la progresión esperada en todo el sector de aprendizaje.

Sirven de apoyo para planificar y evaluar...

¿Qué utilidad tienen los Mapas de Progreso para el trabajo de los docentes?

Pueden ser un apoyo importante para definir objetivos adecuados y para evaluar (ver las Orientaciones para Planificar y las Orientaciones para Evaluar que se presentan en el programa).

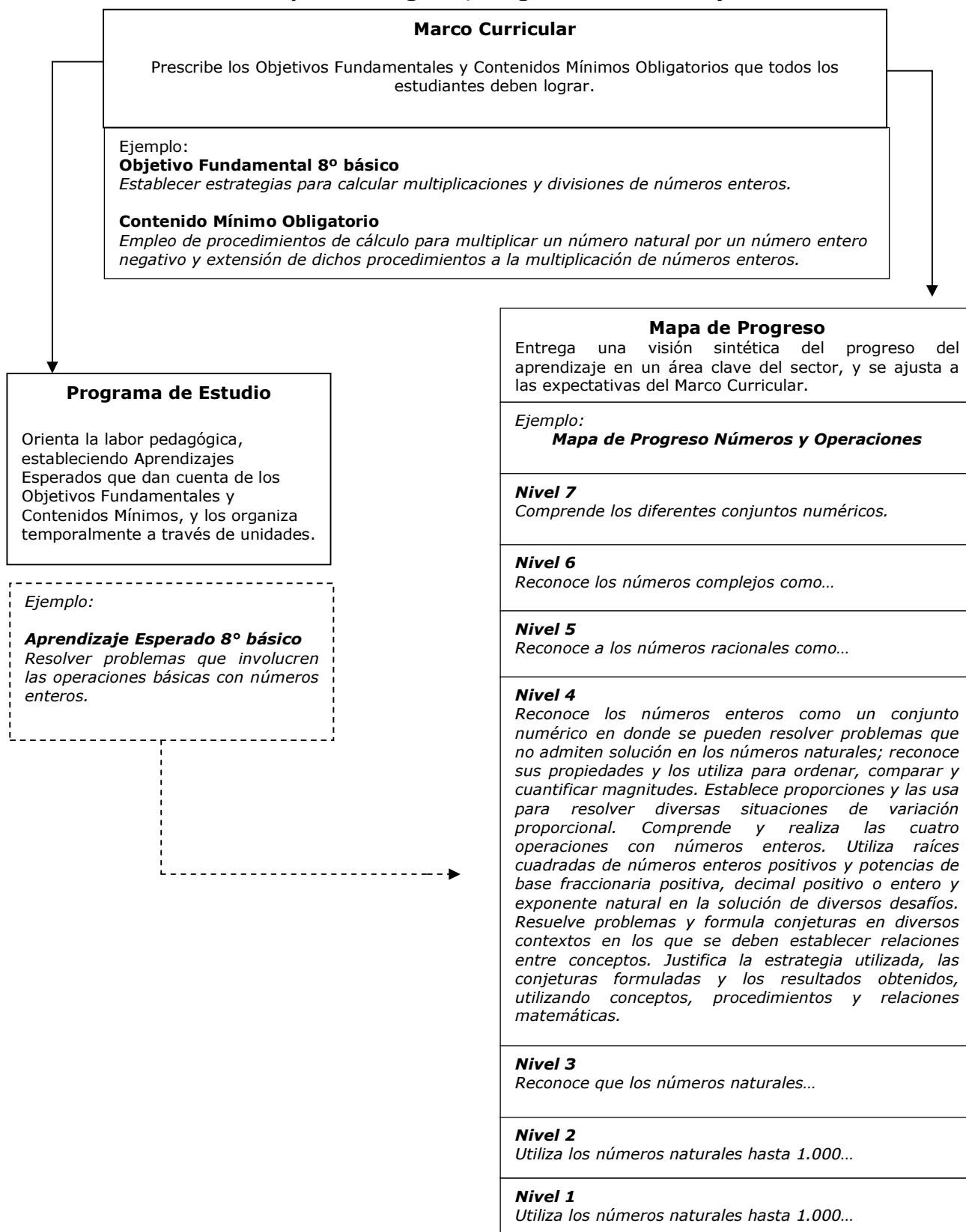
...y para atender la diversidad al interior del curso

Además, son un referente útil para atender a la diversidad de estudiantes dentro del aula:

- permiten más que simplemente constatar que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso. Si se usan para analizar los desempeños de los estudiantes, ayudan a caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten esas diferencias
- la progresión que describen permite reconocer cómo orientar los aprendizajes de los distintos grupos del mismo curso; es decir, de aquellos que no han conseguido el nivel esperado y de aquellos que ya lo alcanzaron o lo superaron
- expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector, de manera sintética y alineada con el Marco Curricular

³ Los Mapas de Progreso describen en 7 niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar de la Educación Media es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa para 4° medio que describe el Nivel 6 en cada mapa.

Relación entre Mapas de Progreso, Programa de Estudio y Marco Curricular



CONSIDERACIONES GENERALES PARA IMPLEMENTAR EL PROGRAMA

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan algunos elementos relevantes al momento de implementar el programa. Algunas de estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

1. Uso del lenguaje

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben promoverse en los distintos sectores de aprendizaje

Los docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Esto se justifica, porque las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan a través del ejercicio en diversos espacios y en torno a distintos temas y, por lo tanto, involucran los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, los docentes deben procurar:

Estas habilidades se pueden promover de diversas formas

Lectura:

- la lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos y narrativos, tablas y gráficos)
- la lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector
- la identificación de las ideas principales y la localización de información relevante
- la realización de resúmenes, síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos
- la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia
- la comprensión y el dominio de nuevos conceptos y palabras

Escritura:

- la escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones, respuestas breves)
- la organización y presentación de información a través de esquemas o tablas
- la presentación de las ideas de una manera coherente y clara
- el uso apropiado del vocabulario en los textos escritos
- el uso correcto de la gramática y de la ortografía

Comunicación oral:

- la capacidad de exponer ante otras personas
- la expresión de ideas y conocimientos de manera organizada
- el desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones
- el uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector

- el planteamiento de preguntas para expresar dudas e inquietudes y para superar dificultades de comprensión
- la disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido
- la interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación con un tema en particular, compartir puntos de vista y lograr acuerdos

2. Uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs)

Debe impulsarse e uso de las TICs a través de los sectores de aprendizaje

El desarrollo de las capacidades para utilizar las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del Marco Curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo que se realiza al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto, se debe procurar que la labor de los estudiantes incluya el uso de las TICs para:

Se puede recurrir a diversas formas de utilización de estas tecnologías

- buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes, y seleccionar esta información, examinando críticamente su relevancia y calidad
- procesar y organizar datos, utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en ellas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector
- desarrollar y presentar información a través del uso de procesadores de texto, plantillas de presentación (power point) y herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video
- intercambiar información a través de las herramientas que ofrece internet, como el correo electrónico, chat, espacios interactivos en sitios web o comunidades virtuales
- respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TICs, como el cuidado personal y el respeto por el otro, señalar las fuentes de donde se obtiene la información y respetar las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales

3. Atención a la diversidad

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben tomarse en consideración

En el trabajo pedagógico, el docente debe tomar en cuenta la diversidad entre los estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos o religiosos y respecto de estilos de aprendizaje y niveles de conocimiento.

Esa diversidad conlleva desafíos que los profesores tienen que contemplar. Entre ellos, cabe señalar:

- promover el respeto a cada uno de los estudiantes, en un contexto de tolerancia y apertura, evitando las distintas formas de discriminación
- procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de los estudiantes
- intentar que todos los alumnos logren los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, pese a la diversidad que se manifiesta entre ellos

Atención a la diversidad y promoción de aprendizajes

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica "expectativas más bajas" para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece al constatar que hay que reconocer los requerimientos didácticos personales de los alumnos, para que todos alcancen altas expectativas. Se aspira a que todos los estudiantes alcancen los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

Es necesario atender a la diversidad para que todos logren los aprendizajes

En atención a lo anterior, es conveniente que, al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el docente considere que precisarán más tiempo o métodos diferentes para que algunos estudiantes logren estos aprendizajes. Para esto, debe desarrollar una planificación inteligente que genere las condiciones que le permitan:

Esto demanda conocer qué saben y, sobre esa base, definir con flexibilidad las diversas medidas pertinentes

- conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de los estudiantes
- evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje
- definir la excelencia, considerando el progreso individual como punto de partida
- incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones) y materiales diversos (visuales, objetos manipulables)
- evaluar de distintas maneras a los alumnos y dar tareas con múltiples opciones
- promover la confianza de los alumnos en sí mismos
- promover un trabajo sistemático por parte de los estudiantes y ejercitación abundante

4. Orientaciones para planificar

La planificación favorece el logro de los aprendizajes

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para lograr los aprendizajes que se debe alcanzar.

El programa sirve de apoyo a la planificación a través de un conjunto de elementos elaborados para este fin

Los programas de estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos han sido elaborados como un material flexible que los profesores pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el programa de estudio para planificar son los Aprendizajes Esperados. De manera adicional, el programa apoya la planificación a través de la propuesta de unidades, de la estimación del tiempo cronológico requerido en cada una, y de la sugerencia de actividades para desarrollar los aprendizajes.

Consideraciones generales para realizar la planificación

La planificación es un proceso que se recomienda realizar, considerando los siguientes aspectos:

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles

- la diversidad de niveles de aprendizaje que han alcanzado los estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para los distintos grupos de alumnos
- el tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible
- las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios
- los recursos para el aprendizaje con que se cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela o aquellos que es necesario diseñar; laboratorio y materiales disponibles en el Centro de Recursos de Aprendizaje (CRA), entre otros

Sugerencias para el proceso de planificación

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en torno a ellos y desarrollarse a partir de una visión clara de lo que los alumnos deben aprender. Para alcanzar este objetivo, se recomienda elaborar la planificación en los siguientes términos:

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes...

- comenzar por una especificación de los Aprendizajes Esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo más clara posible de las expresiones concretas que puedan tener. Esto implica reconocer qué desempeños de los estudiantes demuestran el logro de los aprendizajes. Se deben poder responder preguntas como ¿qué deberían ser capaces de demostrar los estudiantes que han logrado un determinado Aprendizaje Esperado?, ¿qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?

...y, sobre esa base, decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza y la distribución temporal

- a partir de las respuestas a esas preguntas, decidir las evaluaciones a realizar y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se requiere identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado y qué modalidades de enseñanza facilitarían alcanzar este desempeño. De acuerdo a este proceso, se debe definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza y las instancias de retroalimentación

Los docentes pueden complementar los programas con los Mapas de Progreso, que entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.

Se sugiere que la forma de plantear la planificación arriba propuesta se use tanto en la planificación anual como en la correspondiente a cada unidad y al plan de cada clase.

La planificación anual: en este proceso, el docente debe distribuir los Aprendizajes Esperados a lo largo del año escolar, considerando su organización por unidades; estimar el tiempo que se requerirá para cada unidad y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos.

Para esto el docente tiene que:

Realizar este proceso con una visión realista de los tiempos disponibles durante el año

- alcanzar una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en los estudiantes. Esto debe desarrollarse a partir de los Aprendizajes Esperados especificados en los programas. Los Mapas de Progreso pueden resultar un apoyo importante

- identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y los requerimientos a considerar para cada unidad
- sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para que esta distribución resulte lo más realista posible, se recomienda:
 - listar días del año y horas de clase por semana para estimar el tiempo disponible
 - elaborar una calendarización tentativa de los Aprendizajes Esperados para el año completo, considerando los feriados, los días de prueba y de repaso, y la realización de evaluaciones formativas y retroalimentación
 - hacer una planificación gruesa de las actividades a partir de la calendarización
 - ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas

Realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad

La planificación de la unidad: implica tomar decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad.

La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

- especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los Aprendizajes Esperados de la unidad y se recomienda complementarla con los Mapas de Progreso
- crear una evaluación sumativa para la unidad
- idear una herramienta de diagnóstico de comienzos de la unidad
- calendarizar los Aprendizajes Esperados por semana
- establecer las actividades de enseñanza que se desarrollarán
- generar un sistema de seguimiento de los Aprendizajes Esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y retroalimentación
- ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de los estudiantes

Procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, qué aprendieron y de qué manera

La planificación de clase: es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los Aprendizajes Esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará.

Adicionalmente, se recomienda que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre y especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Se requiere considerar aspectos como los siguientes:

- inicio: en esta fase, se debe procurar que los estudiantes conozcan el propósito de la clase; es decir, qué se espera que aprendan. A la vez, se debe buscar captar el interés de los estudiantes y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores
- desarrollo: en esta etapa, el docente lleva a cabo la actividad contemplada para la clase
- cierre: este momento puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En él se debe procurar que los estudiantes se formen una visión acerca de qué aprendieron y cuál es la utilidad de las estrategias y experiencias desarrolladas para promover su aprendizaje.

5. Orientaciones para evaluar

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No se debe usar solo como un medio para controlar qué saben los estudiantes, sino que cumple un rol central en la promoción y el desarrollo del aprendizaje. Para que cumpla efectivamente con esta función, debe tener como objetivos:

- ser un recurso para medir progreso en el logro de los aprendizajes
- proporcionar información que permita conocer fortalezas y debilidades de los alumnos y, sobre esta base, retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector
- ser una herramienta útil para la planificación

¿Cómo promover el aprendizaje a través de la evaluación?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

Explicitar qué se evaluará

Identificar logros y debilidades

Ofrecer retroalimentación

- informar a los alumnos sobre los aprendizajes que se evaluarán. Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia conseguir los aprendizajes que deben lograr
- elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de los estudiantes. Las evaluaciones entregan información para conocer sus fortalezas y debilidades. El análisis de esta información permite tomar decisiones para mejorar resultados alcanzados
- retroalimentar a los alumnos sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con los estudiantes permite orientarlos acerca de los pasos que deben seguir para avanzar. También da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes; a su vez, esto facilita involucrarse y comprometerse con ellos.

¿Cómo se pueden articular los Mapas de Progreso del Aprendizaje con la evaluación?

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de los alumnos y los ubican en un continuo de progreso.

Los mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación

Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes, en tanto permiten:

- reconocer aquellos aspectos y dimensiones esenciales de evaluar
- aclarar la expectativa de aprendizaje nacional, al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa
- observar el desarrollo, la progresión o el crecimiento de las competencias de un alumno, al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el mapa
- contar con modelos de tareas y preguntas que permiten a cada alumno evidenciar sus aprendizajes

¿Cómo diseñar la evaluación?

La evaluación debe diseñarse a partir de los Aprendizajes Esperados, con el objeto de observar en qué grado se alcanzan. Para lograrlo, se recomienda diseñar la evaluación junto a la planificación y considerar las siguientes preguntas:

Partir estableciendo los Aprendizajes Esperados a evaluar...

- ¿Cuáles son los Aprendizajes Esperados del programa que abarcará la evaluación?
Si debe priorizar, considere aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerrequisitos para desarrollar otros aprendizajes. Para esto, los Mapas de Progreso pueden ser de especial utilidad
- ¿Qué evidencia necesitarían exhibir los estudiantes para demostrar que dominan los Aprendizajes Esperados?
Se recomienda utilizar como apoyo los Indicadores de Evaluación que presenta el programa.
- ¿Qué método empleará para evaluar?
Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio e investigaciones, entre otros).

...y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios

En lo posible, se deben presentar situaciones que pueden resolverse de distintas maneras y con diferente grado de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan solucionarlas y muestren sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

- ¿Qué preguntas incluirá en la evaluación?
Se deben formular preguntas rigurosas y alineadas con los Aprendizajes Esperados, que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado
- ¿Cuáles son los criterios de éxito?, ¿cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?
Esto se puede responder con distintas estrategias. Por ejemplo:

- o comparar las respuestas de los estudiantes con las mejores respuestas de otros alumnos de edad similar. Se pueden usar los ejemplos presentados en los Mapas de Progreso
- o identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado, y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones realizadas en torno al mismo aprendizaje
- o desarrollar rúbricas⁴ que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y muestren los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño

⁴ Rúbrica: tabla o pauta para evaluar

MATEMÁTICA

1. Propósitos formativos del sector

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana.

Aprender matemáticas acrecienta también las habilidades relativas a la comunicación; por una parte, enseña a presentar información con precisión y rigurosidad y, por otra, a demandar exactitud y rigor en las informaciones y argumentos que se recibe.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. El entorno social valora el conocimiento matemático y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades; por lo tanto, contribuye a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso. En consecuencia, la calidad, la pertinencia y la amplitud de ese conocimiento afectan las posibilidades y la calidad de vida de las personas y afecta el potencial de desarrollo del país.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones y prepara a los estudiantes para que entiendan el medio y las múltiples relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. Se trata de espacios en los que la cultura, la tecnología y las ciencias se redefinen en forma permanente y se hacen más difíciles, y las finanzas, los sistemas de comunicación y los vínculos entre naciones y culturas se relacionan y se globalizan.

2. Habilidades matemáticas

Al estudiar matemáticas, el estudiante adquiere –como el razonamiento lógico– la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas. La tabla siguiente puede resultar útil para:

- observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector
- focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfatizan dichas habilidades
- situarse en el nivel, observar las habilidades que se pretendió enseñar en los años anteriores y las que se trabajarán más adelante
- advertir diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza

Habilidades de pensamiento matemático					
4° básico	5° básico	6° básico	7° básico	8° básico	I medio
Resolver problemas en contextos significativos que requieren el uso de los contenidos del nivel	Resolver problemas en contextos diversos y significativos	Resolver problemas en contextos significativos	Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel	Resolver problemas en contextos diversos y significativos	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos
			Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos	Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones	Fundamentar opiniones y tomar decisiones
Formular conjeturas y verificarlas, para algunos casos particulares		Formular y verificar conjeturas, en casos particulares			
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica	Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica		Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica		
Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita	
			Emplear formas simples de modelamiento matemático	Emplear formas simples de modelamiento matemático	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables
				Verificar proposiciones simples, para casos particulares	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades

3. Orientaciones didácticas

Se ha concebido este sector como una oportunidad para que los estudiantes adquieran aprendizajes de vida. La matemática es un área poderosa de la cultura, pues permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno. Por eso, es importante que los docentes se esfuercen para que todos los alumnos del país aprendan los conocimientos y desarrollen las capacidades propias de esta disciplina. Estos programas entregan algunas orientaciones que ayudarán a los profesores a cumplir con este objetivo por medio de la planificación y en el transcurso de las clases.

Los conceptos matemáticos: profundidad e integración

Los estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Tienen que enfrentar variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones. De esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar las matemáticas. Se recomienda que usen materiales concretos, realicen trabajos prácticos y se apoyen en la tecnología, en especial en el ciclo básico.

El uso del contexto

Es importante que el docente aclare que esta disciplina está enraizada en la cultura y en la historia; asimismo, que impacta en otras áreas del conocimiento científico, crea consecuencias y permite aplicaciones. Preguntarse cómo se originaron los conceptos y modelos matemáticos, en qué períodos de la historia y cómo se enlazaron con la evolución del pensamiento. Es un ancla importante para el aprendizaje. Se recomienda usar analogías y representaciones cercanas a los estudiantes, en especial en las etapas de exploración. También se sugiere aplicar las matemáticas a otras áreas del saber y en la vida diaria como un modo de apoyar la construcción del conocimiento matemático.

Razonamiento matemático y resolución de problemas

Esta disciplina se construye a partir de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas y ayuda a razonar en vez de actuar de modo mecánico. Por eso es importante invitar a los estudiantes a buscar regularidades. También se busca desarrollar y explicar la noción de estrategia, comparar diversas formas de abordar problemas y justificar y demostrar las proposiciones matemáticas. El docente debe procurar, asimismo, que los estudiantes conjeturen y verifiquen cómo se comportan los elementos y las relaciones con que se trabaja. Deben analizar los procedimientos para resolver un problema y comprobar resultados, propiedades y relaciones.

Aunque deben ser competentes en diversas habilidades matemáticas, el profesor tiene que evitar que pongan demasiado énfasis en los procedimientos si no comprenden los principios matemáticos correspondientes.

Uso del error

Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de búsqueda y creación. Un educador puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que todos los alumnos alcancen los aprendizajes propuestos.

Aprendizaje matemático y desarrollo personal

La clase de matemática ofrece abundantes ocasiones para el autoconocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la metacognición⁵: ¿cómo lo hice?, ¿cómo lo hicieron?, ¿de qué otra manera es posible? Además, la percepción que cada cual tiene de su propia capacidad para aprender y hacer matemática, surge de la retroalimentación que le ha dado la propia experiencia. En ese sentido, el docente tiene en sus manos un poderoso instrumento: reconocer los esfuerzos y los logros de los alumnos. Otros aspectos que también ayudan a que cada estudiante aumente la confianza en sí mismo son valorar las diferencias, aceptar los éxitos o las acciones de sus

⁵ Metacognición: manera de aprender a razonar sobre el propio razonamiento

pares, crear un clima de confianza y distinguir de qué modo enfrenta cada uno el triunfo o el fracaso, sea propio o de los demás.

Tecnologías digitales y aprendizaje matemático

El programa propone usar programas y ambientes digitales para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas a través de modelos en los que se puede experimentar con ideas matemáticas; también se puede crear situaciones para que los alumnos exploren las características, los límites y las posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores geométricos, simbólicos y de estadística son laboratorios para investigar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico, se puede analizar y entender números grandes o muy pequeños. Y se puede estudiar el comportamiento de funciones, incluso las de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes con representaciones dinámicas de una gran cantidad de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos permiten experimentar con nociones y relaciones de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. Se trata de un espacio muy atractivo para los estudiantes y que los ayudará mucho a formarse para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

Clima y motivación

Se debe propiciar un ambiente creativo para que los alumnos formulen, verifiquen o refuten conjeturas respecto de los problemas que abordan. Ese ambiente debe admitir que el error, la duda y la pregunta son importantes y valiosos para construir conocimiento; asimismo, tiene que valorar los aportes de todos y aprovecharlos para crear una búsqueda y una construcción colectiva. En ese espacio será natural analizar acciones y procedimientos y buscar caminos alternativos.

VISIÓN GLOBAL DEL AÑO

Cuadro sinóptico de Aprendizajes Esperados

Semestre 1		Semestre 2	
Unidad 1 Números y álgebra	Unidad 2 Geometría	Unidad 3 Datos y azar	Unidad 4 Álgebra
<ol style="list-style-type: none"> 1. Establecer estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros 2. Utilizar estrategias para determinar el valor de potencias de base entera y exponente natural 3. Determinar propiedades de multiplicación y división de potencias de base entera y exponente natural 4. Verificar qué propiedades de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en potencias de base fraccionaria positiva, decimal positiva y exponente natural 5. Resolver problemas que involucren las operaciones con números enteros y las potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva y exponente natural 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos 2. Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas 3. Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos 4. Teselar⁶ el plano con polígonos regulares, utilizando regla y compás o procesadores geométricos 5. Utilizar las transformaciones isométricas como herramienta para realizar teselaciones regulares y semirregulares 6. Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos 7. Calcular el perímetro de circunferencias y de arcos de ellas 8. Calcular el área del círculo y de sectores de él 9. Calcular medidas de superficies de cilindros, conos y pirámides, utilizando fórmulas 10. Calcular volúmenes de cilindros y conos, utilizando fórmulas 11. Resolver problemas en contextos diversos relativos a cálculos de: 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Interpretar información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos 2. Representar datos, provenientes de diversas fuentes, en tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos 3. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, extendiendo al caso de datos agrupados en intervalos 4. Comprender el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia para realizar inferencias 5. Asignar probabilidades teóricas a la ocurrencia de eventos en experimentos aleatorios con 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos 2. Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones por medio de ellas 3. Identificar variables relacionadas en forma proporcional y no proporcional 4. Analizar situaciones de proporcionalidad, mediante el uso de programas computacionales gráficos 5. Resolver problemas en diversos contextos que implican proporcionalidad directa y problemas que implican proporcionalidad inversa

⁶ Teselar: "pavimentar" una superficie con figuras regulares o irregulares, sin que queden espacios entre ellas ni se superpongan

	<ul style="list-style-type: none"> • perímetros de circunferencias y áreas de círculos • áreas de superficies de cilindros, conos y pirámides • volúmenes de cilindros y conos 	resultados finitos y equiprobables ⁷ , y contrastarlas con resultados experimentales	
Tiempo estimado 55 horas	Tiempo estimado 75 horas	Tiempo estimado 65 horas	Tiempo estimado 45 horas

⁷ Equiprobable: que tiene la misma probabilidad

SEMESTRE 1

UNIDAD 1

Números y álgebra

Propósito

Esta unidad permite que los estudiantes apliquen sus conocimientos sobre multiplicación y división de números naturales y sobre adiciones y sustracciones de números enteros, a la multiplicación y la división de números enteros en casos particulares.

Además, se extiende el trabajo con potencias de bases naturales, fraccionarias y decimales positivas, a bases enteras con exponentes naturales. Para lograrlo, se realizan actividades orientadas a verificar las propiedades de estas potencias en casos particulares y a resolver problemas en contextos numéricos donde ellas intervienen.

Conceptos clave

Potencias de base entera y exponente natural, propiedades de las potencias.

Prerrequisitos

- Adición y sustracción de números enteros
- Potencias de base natural, fraccionaria y decimal positiva con exponente natural

Contenidos disciplinares

- Multiplicación y división de números enteros
- Propiedades de la multiplicación y la división de números enteros
- Potencias de base entera, fraccionaria y decimal positiva con exponente natural
- Propiedades de las potencias de base entera, fraccionaria y decimal positiva con exponente natural

Habilidades

- Argumentar acerca de la validez de las propiedades de la multiplicación y la división de números enteros
- Establecer estrategias para resolver divisiones de números enteros
- Estimar mentalmente el valor de algunas potencias
- Interpretar información expresada en potencias
- Conjeturar, argumentar, verificar y aplicar propiedades de las potencias

Actitudes

- Trabajo en equipo y mostrar iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

Aprendizajes Esperados	Sugerencias de indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Establecer estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros	<ul style="list-style-type: none"> • Calculan multiplicaciones de enteros utilizando la estrategia establecida • Calculan divisiones de enteros utilizando la estrategia establecida
2. Utilizar estrategias para determinar el valor de potencias de base entera y exponente natural	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizan estrategias para determina el signo de expresiones del tipo $(-1)^n$ cuando n es un número natural • Utilizan estrategias para determinar el valor de expresiones del tipo $(-a)^n$ cuando a, n son números naturales • Estiman mentalmente potencias de base entera de un dígito y exponente natural menor de 5. Por ejemplo, estima $(-7)^4$ como $49 \cdot 49$, obteniendo un número menor a 2500
3. Determinar propiedades de multiplicación y división de potencias de base entera y exponente natural	<ul style="list-style-type: none"> • Explican los pasos realizados para determinar las propiedades de potencias de base entera y exponente natural • Calculan potencias de base entera y exponente natural utilizando las propiedades determinadas
4. Verificar qué propiedades de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en potencias de base fraccionaria positiva, decimal positiva y exponente natural	<ul style="list-style-type: none"> • Calculan multiplicaciones de potencias de base fraccionaria positiva y exponente natural, utilizando la propiedad relativa a multiplicación de potencias de igual base entera y exponente natural • Verifican qué propiedades relativas a la división de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en potencias de base fraccionaria positiva • Explican de manera escrita los pasos realizados en la verificación de potencias de potencias de base decimal positiva y exponentes naturales
5. Resolver problemas que involucren las operaciones con números enteros y las potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva y exponente natural	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelven problemas relativos a multiplicaciones de enteros • Aplican correctamente la regla de los signos y la prioridad de las operaciones en la resolución de problemas de operatoria combinada con números enteros • Resuelven problemas en contextos cotidianos que involucren potencias de base entera y exponente natural • Verifican los resultados obtenidos en función del contexto del problema • Analizan los procedimientos utilizados en términos de los resultados obtenidos

Aprendizaje Esperados en relación con los OFT

Trabajo en equipo e iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

- Participa activamente en actividades grupales
- Es responsable en la tarea asignada
- Toma iniciativa en actividades de carácter grupal
- Propone alternativas de solución a problemas matemáticos en actividades grupales

Orientaciones didácticas para la unidad

Esta unidad amplía las operaciones con números enteros, pues incorpora la multiplicación y la división. Al respecto, se recomienda al docente enseñarlas de un modo similar a las operaciones de adición y sustracción. Las reglas para operar con números enteros no son muy fáciles de comprender, pero sí de memorizar; por eso, se debe buscar que los alumnos entiendan y evitar que solo aprendan de memoria los procedimientos. Se recomienda que docente use metáforas o analogías para ayudarlos a comprender los procedimientos involucrados, en vez de limitarse a la ejercitación rutinaria.

En el tema de las potencias, se pueden aplicar expresiones del tipo $(-1)^n$ para calcular potencias del tipo $(-a)^n$, donde a pertenece a los naturales.

Como estrategia, en las operaciones con potencias se recomienda partir de lo particular y llegar a lo general (es decir, ejemplificar y trabajar con números para luego generalizar) y realizar también el proceso inverso. Conviene recomendar a los estudiantes que, cada vez que una expresión algebraica carezca de sentido y sea difícil de entender, la "lleven" a un terreno familiar; es decir, que estudien su comportamiento para distintos valores numéricos. Las actividades deben permitir que comprendan expresiones como $(-a)^n \cdot (-b)^n$, con a, b, n en los naturales; multiplicaciones de potencias expresadas como $(-a)^n \cdot (-b)^m$ o $(-a)^n \cdot (-a)^m$; potencias de base fraccionaria de la forma $(-\frac{a}{b})^n$ con a, b en los naturales; multiplicaciones de potencias con base fraccionaria de la forma $(-\frac{a}{b})^n \cdot (-\frac{c}{d})^n$ ó $(-\frac{a}{b})^n \cdot (-\frac{a}{b})^m$ con a, b, n en los naturales y, por último, con potencias elevadas a otra potencias $((-a)^n)^m$, con a, n en los naturales.

Es habitual que los estudiantes presenten ritmos de comprensión muy variados cuando tengan que establecer generalizaciones. Por lo tanto, se recomienda diseñar actividades que contemplen el trabajo en equipo. Ahí puedan aflorar naturalmente líderes intelectuales que apoyen la labor docente al interior de cada grupo y permitan diversificar los ritmos de producción; eso ayuda a dar tiempos diferenciados a cada estudiante y, además, posibilita el diálogo y la discusión.

Ejemplos de actividades

AE 1

Establecer estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros.

Actividades

1. Formulan estrategias para multiplicar números enteros y las aplican para calcular multiplicaciones en las que intervienen estos números. Al respecto, formulan estrategias para:

- multiplicar números de la forma $a \cdot (-b)$
- multiplicar números de la forma $(-a) \cdot (-b)$

Observaciones al docente

El profesor puede sugerirles que usen la representación de los números enteros en la recta numérica.

Es importante que no enseñe las reglas de los signos a los alumnos antes de que elaboren las estrategias; deben establecer juntos dichas reglas a través de estas actividades.

Aplican estas estrategias para realizar cálculos del tipo:

- $-(-(-a))$
 - $[(-a) \cdot (-b) + c \cdot (-d)][a + (-b)]$
2. Formulan estrategias para dividir números enteros y las aplican para calcular divisiones en este contexto numérico. Por ejemplo, formulan estrategias para:
- realizar divisiones de la forma $a : (-b)$

Observaciones al docente

Puede sugerir a los estudiantes que expresen la división anterior en la forma $-a : b$.

- divisiones de la forma $(-a) : (-b)$
- A continuación la utilizan para realizar cálculos del tipo:
- $-(-(-a)) : (-b)$
 - $[(-a) \cdot (-b) + c \cdot (-d)] : [a \cdot (-b)]$
3. Resuelven divisiones de números enteros, utilizando las propiedades de la multiplicación. Por ejemplo, para calcular $a : (-b)$, expresan este cociente en la forma $a \cdot (-\frac{1}{b})$.

AE 2

Utilizar estrategias para determinar el valor de potencias de base entera y exponente natural.

Actividades

1. Usan estrategias para calcular expresiones del tipo $(-a) + (-a) + (-a) + \dots + (-a)$, donde se ha sumado a veces $-a$ y convierten esta suma en forma de potencias.
2. Utilizan estrategias para estimar potencias de base entera de un dígito y exponente natural. Por ejemplo, estiman $(-3)^2 \cdot (-7)^2$.
3. Verifican en casos particulares que $(-1)^{2n} = 1$ y $(-1)^{2n+1} = -1$ cuando $n \in \mathbb{N}$, y lo utilizan para realizar cálculos del tipo $(-a)^n$ y cálculos del tipo $b(-a)^n$, cuando $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo: $2 \cdot (-3)^5$
4. Emplean estos resultados para resolver cálculos asociados a expresiones donde intervienen potencias del tipo $b(-a)^n$. Por ejemplo: $2 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) + 3 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

AE 3

Determinar propiedades de multiplicación y división de potencias de base entera y exponente natural.

Actividades

Los estudiantes utilizan resultados acerca de potencias del tipo $(-a)^n$ y:

1. resultados obtenidos en 7° básico respecto de multiplicaciones de potencias de igual base natural y exponentes naturales, para determinar propiedades respecto de multiplicaciones del tipo $a^n \cdot a^m$, donde la base es entera y los exponentes son números naturales.
2. resultados obtenidos en 7° básico respecto de potencias de potencias (es decir, acerca de expresiones del tipo $(a^n)^m$ donde la base y los exponentes son números naturales) para determinar propiedades respecto de multiplicaciones del tipo $(a^n)^m$, donde la base es entera y los exponentes son números naturales.

AE 4

Verificar qué propiedades de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en potencias de base fraccionaria positiva, decimal positiva y exponente natural.

Actividades

1. Comprueban que las propiedades de multiplicaciones de potencias de base entera y exponente natural se verifican en multiplicaciones de potencias de base fraccionaria o decimal positiva y exponente natural; es decir,

$$\text{que } \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

2. Comprueban que las propiedades de potencias de potencias de enteros de base entera y exponentes naturales se verifican en potencias de potencias de números de base fraccionaria o decimal positiva y exponentes

$$\text{naturales; es decir, que } \left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \frac{a^{nm}}{b^{nm}}$$

3. Verifican que las propiedades de divisiones de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en divisiones de potencias de igual base fraccionaria o decimal positiva y exponente natural; es decir, que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

4. Comprueban que las propiedades de divisiones de potencias de bases enteras y exponente natural se verifican en divisiones de potencias de números de base fraccionaria o decimal positiva e igual exponente natural; es decir, que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$$

AE 5

Resolver problemas que involucren las operaciones con números enteros y las potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva y exponente natural.

Actividades

- Resuelven problemas en contextos geométricos que involucren potencias de base fraccionaria positiva y exponente natural. Por ejemplo, en un cuadrado de lado 10 cm. se unen los puntos medios de sus lados, y en este nuevo cuadrilátero se vuelven a unir los puntos medios de sus lados, y así sucesivamente. Se pide:
 - determinar el tipo de cuadriláteros que se forman
 - calcular el área de cualquiera de esos cuadriláteros, por ejemplo, del quinto cuadrilátero formado
- Analizan los procedimientos utilizados y verifican, usando un software geométrico, los resultados obtenidos. En el caso de la actividad anterior analizan los procedimientos utilizados para determinar el tipo de cuadriláteros que se forman, y verifican los resultados obtenidos utilizando un software geométrico.
- Usan las operaciones básicas de los números enteros para responder preguntas del tipo:
 - la temperatura ha aumentado 2° Celsius cada hora durante 4 horas. ¿Cuánto ha aumentado la temperatura en ese tiempo?
 - la temperatura ha disminuido 4° Celsius cada hora durante 5 horas. ¿Cuántos grados ha disminuido la temperatura en ese tiempo?
- Resuelven problemas sencillos que requieren operatoria con números enteros, del tipo:
 - un buzo profesional desciende a 10 metros de profundidad para realizar un experimento, luego sube 27 metros y después desciende 4 veces el descenso inicial. ¿A qué profundidad quedó?
- Inventan problemas que se resuelven con las operaciones:
 - $(-5) \cdot (-4)$
 - $(-10) : 2 + 5 \cdot (-6)$
- ⓐAplican las propiedades de las potencias de base fraccionaria y decimal positiva con exponente natural en situaciones reales. Por ejemplo:
 - En la fisión binaria hay una duplicación idéntica del material genético y de sus mutaciones. Esta reproducción requiere solo un progenitor, que dará lugar a dos células hijas idénticas, lo que sucede cuando la célula esta lista para reproducirse; entonces aumenta su contenido celular y su tamaño en forma alargada. Luego comienza la bipartición, cuando se forma un tabique que se encargará de producir un estrangulamiento en la célula. En las bacterias, este proceso puede ocurrir cada 20 minutos. (Fuente: <http://infobiol.com/fisionbinaria>).

- o Si se tiene inicialmente una célula, ¿cuántas habrá después de 6 divisiones?

Ejemplo de evaluación

Aprendizaje Esperado

Utilizar estrategias para determinar el valor de potencias de base entera y exponente natural.

Indicadores de Evaluación

- Utilizan estrategias para determinar el signo de expresiones del tipo $(-1)^n$ cuando n es un número natural.
- Utilizan estrategias para determinar el valor de expresiones del tipo $(-a)^n$ cuando a, n son números naturales.
- Estiman mentalmente potencias de base entera de un dígito y exponente natural menor de 5. Por ejemplo, estiman $(-7)^4$ como $49 \cdot 49$ y obtienen un número menor a 2.500.

Actividad

Lea cuidadosamente la situación dada. Responda las preguntas propuestas.

- Estime mentalmente el valor de la expresión $(-2)^{2n+1} + 2^{2n+1}$ para distintos valores de n , sabiendo que n puede tomar solo valores naturales. Escriba su estimación en el recuadro:
- Dé un argumento que apoye la validez de la propiedad de la división de potencias de igual base aplicada en el ejercicio $\frac{(-3)^5}{(-3)^3} = (-3)^2$
- Escriba, en términos de potencias, la diferencia entre la octava parte de 2^{n+3} y la mitad de 2^{n+1} . Si la expresión anterior se representa por A , calcule el valor numérico de $(A-1)^n$ para distintos valores numéricos de n , considerando que n puede tomar solo valores naturales.

Criterios de evaluación

Al evaluar, considerar los siguientes criterios:

- Estiman el valor de potencias de base un dígito entero.
- Expresan como potencias productos en que los factores son potencias de base entera.
- Argumentan acerca de la validez de la propiedad del cociente de potencias de igual exponente.
- Aplican las propiedades de las operaciones de las potencias para resolver problemas matemáticos.

UNIDAD 2

Geometría

Propósito

En esta unidad, los estudiantes estudiarán las transformaciones isométricas, conocerán el concepto de lugar geométrico y calcularán áreas en el círculo, perímetros en la circunferencia y áreas y volúmenes en figuras tridimensionales.

Esta unidad les permite aplicar los conocimientos trabajados acerca de áreas en 5º básico, ángulos en 6º básico y construcciones geométricas en 7º básico. Pueden integrar la geometría con otras disciplinas, específicamente con el arte plástico, pues aprenderán a construir teselaciones, conocerán el número π , profundizarán sus conocimientos acerca de figuras tridimensionales (como el cono, el cilindro y la pirámide) y ampliarán su lenguaje geométrico mediante el trabajo con lugares geométricos.

Conceptos clave

Traslaciones, rotaciones, reflexiones, lugares geométricos, teselaciones, áreas de superficies y volúmenes.

Prerrequisitos

- Ángulos en polígonos
- Construcciones de polígonos
- Áreas en triángulos y cuadriláteros
- Características de conos, cilindros y pirámides

Contenidos disciplinares

- Vectores en el plano
- Ejes de simetría
- Traslaciones, rotaciones y reflexiones
- Teselaciones
- Circunferencia y círculo como lugares geométricos
- Perímetro de la circunferencia
- Área del círculo
- Áreas de la superficie de conos, cilindros y pirámides
- Volúmenes de conos, cilindros y pirámides

Habilidades

- Construir transformaciones isométricas
- Realizar teselaciones
- Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos
- Comprender el número π
- Calcular el perímetro de la circunferencia
- Calcular áreas del círculo y de la superficie de conos, cilindros y pirámides
- Calcular el volumen de conos, cilindros y pirámides

Actitudes

- Perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos
- Trabajo en equipo e iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

Aprendizajes Esperados	Sugerencias de Indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos	<ul style="list-style-type: none"> • Caracterizan vectores en el plano y los reconocen en contextos diversos • Caracterizan la traslación de figuras en el plano • Identifican ángulos y puntos respecto de los que se han efectuado rotaciones • Caracterizan los ejes de simetría de una reflexión de figuras en el plano
2. Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocen propiedades de la traslación en traslaciones de figuras del plano • Explican propiedades reconocidas de la rotación en figuras que han sido rotadas en el plano
3. Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos	<ul style="list-style-type: none"> • Rotan figuras en el plano, utilizando regla y compás o un procesador geométrico • Trasladan polígonos y luego los reflejan, utilizando regla y compás o un procesador geométrico • Describen patrones que se observan al aplicar reflexiones a figuras del plano
4. Teselar el plano con polígonos regulares, utilizando regla y compás o procesadores geométricos	<ul style="list-style-type: none"> • Determinan las condiciones que deben satisfacer los elementos de los polígonos que participan de una teselación en el plano • Determinan las posibles combinaciones de polígonos regulares con las que se puede realizar una teselación • Teselan el plano solamente con polígonos regulares de un tipo, utilizando regla y compás o procesadores geométricos. Por ejemplo, teselan el plano con hexágonos regulares por medio de regla y compás
5. Utilizar las transformaciones isométricas como herramienta para realizar teselaciones regulares y teselaciones semirregulares	<ul style="list-style-type: none"> • Teselan el plano con un solo polígono regular, utilizando traslaciones y reflexiones • Construyen la configuración base de una teselación con más de un polígono regular, utilizando transformaciones isométricas
7. Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos	<ul style="list-style-type: none"> • Explican el concepto de lugar geométrico • Explican las diferencias entre círculo y circunferencia, utilizando el concepto de lugar geométrico
6. Calcular el perímetro de circunferencias y de arcos de ellas	<ul style="list-style-type: none"> • Aproximan valores del número π, utilizando longitudes y diámetros de circunferencias • Calculan perímetros aproximados con valores aproximados del número π. Por ejemplo, calculan el perímetro de una circunferencia de radio 3cm con $\pi = 3,14$

	<ul style="list-style-type: none"> • Calculan perímetros de arcos de circunferencias
7. Calcular el área del círculo y de sectores de él	<ul style="list-style-type: none"> • Calculan valores aproximados del área de círculos con valores aproximados de π • Calculan áreas de sectores de círculos • Calculan la suma de áreas de círculos y la expresan en un solo término
8. Calcular medidas de superficies de cilindros, conos y pirámides, utilizando fórmulas	<ul style="list-style-type: none"> • Comparan áreas de superficies de conos y pirámides • Aproximan áreas de cilindros, conos y pirámides de acuerdo a valores distintos de π • Calculan radios y alturas de conos en términos del área de su superficie
9. Calcular volúmenes de cilindros y conos, utilizando fórmulas	<ul style="list-style-type: none"> • Comparan volúmenes de superficies de conos y cilindros • Aproximan volúmenes de cilindros y conos, empleando distintos valores de π • Calculan radios y alturas de conos y cilindros en función de sus volúmenes
10. Resolver problemas, en contextos diversos, relativos a cálculos de: <ul style="list-style-type: none"> • perímetros de circunferencias y áreas de círculos • áreas de superficies de cilindros, conos y pirámides • volúmenes de cilindros y conos 	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelven problemas en contextos geométricos relativos a determinar áreas de figuras en que intervienen círculos. Por ejemplo, calculan el área de la superficie comprendida entre un cuadrado y un círculo inscrito en él • Resuelven problemas que implican calcular volúmenes de cilindros en contextos geométricos. Por ejemplo, calculan el volumen del espacio que existe entre dos cilindros de bases distintas y de igual altura • Resuelven problemas relativos a calcular áreas de superficies de pirámides en contextos del mundo real. Por ejemplo, verifican áreas de la superficie de las pirámides de Egipto

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos

- Muestra un método para realizar las transformaciones isométricas
- Persevera en la realización de teselaciones
- Termina las tareas iniciadas, relativas a los temas tratados
- Desarrolla tenacidad frente a obstáculos o dudas que se les presenten en problemas propuestos

Trabajo en equipo e iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

- Participa activamente en actividades grupales
- Es responsable en la tarea asignada
- Toma iniciativa en actividades de carácter grupal
- Propone alternativas de solución a problemas matemáticos en actividades grupales

Orientaciones didácticas para la unidad

La introducción de transformaciones isométricas en 8° básico permite a los estudiantes estudiar la geometría euclidiana "en movimiento". De hecho, es recomendable estimularlos para que entiendan que las transformaciones isométricas, mantienen inalterables los lados y los ángulos de las polígonos transformados. De esta manera, dos figuras son congruentes cuando existe una transformación isométrica que lleva a una en la otra.

En este nivel se proponen transformaciones solo en el plano euclidiano. Las transformaciones en el plano cartesiano se verán en 1° medio. Por ello, se debe poner el énfasis en las construcciones con regla y compás (o con un procesador geométrico). Las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones se trabajan en el plano euclidiano, utilizando instrumentos como la regla y el compás, o procesadores geométricos.

Otro ejercicio que resulta desafiante para los estudiantes es trabajar con los procesos inversos de las transformaciones isométricas. Es decir, se les entrega algunas figuras trasladadas, rotadas y reflejadas y se les pide deduzcan los vectores, puntos, ángulos y ejes de simetría respecto de los que se realizaron las transformaciones en cuestión. Se sugiere diseñar actividades que posibiliten el trabajo en equipo o en parejas.

Los teselados permiten aplicar transformaciones isométricas y resulta interesante establecer las conexiones entre ambas. En este contexto, surge de manera natural la necesidad de establecer, en el caso de los teselados regulares o semi-regulares, los polígonos que permiten teselar el plano, que corresponden cuyos ángulos interiores que concurren en un vértice, suman 360° .

Cuando los estudiantes construyen teselados, la matemática se torna artística; es un buen momento para observar y fomentar la originalidad en las producciones y el rigor y la perseverancia en el trabajo.

En cuanto al cálculo de áreas de las superficies de las caras de figuras 3D, es importante que el docente diseñe actividades que estimulen a los estudiantes a deducir las fórmulas para determinar dichas áreas. Resulta de gran ayuda usar algún software que permita manipular y estudiar las distintas figuras generadas. Se puede hacer de dos maneras. La primera consiste en que el profesor maneje el programa computacional, lo presente mediante un proyector y pida que los alumnos participen activamente. La otra opción es que los estudiantes trabajen solos, en parejas o pequeños grupos frente a un computador; en este caso, se recomienda construir material de trabajo que sirva para orientar y monitorear el trabajo de los alumnos, pues los de este nivel suelen ser dispersos, les cuesta concentrarse por períodos prolongados y asocian la utilización del computador al ocio y las comunicaciones más que al trabajo guiado.

Ejemplos de actividades

AE 1

Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos.

Actividades

1. Caracterizan traslaciones de figuras en el plano y las reconocen en diversas situaciones. Al respecto:
 - caracterizan vectores en el plano
 - caracterizan traslaciones en el plano, en términos de los vectores respecto de los cuales ellas se realizan
 - reconocen traslaciones de figuras en contextos diversos; por ejemplo, en el arte
2. Caracterizan reflexiones de figuras en el plano y las reconocen en contextos diversos. Al respecto:

- caracterizan los ejes de simetría
 - comprenden que las reflexiones de figuras del plano se realizan respecto de ejes de simetría
 - reconocen reflexiones de figuras del plano en contextos diversos; por ejemplo, en el mundo de los insectos
3. Caracterizan rotaciones de figuras en el plano y las reconocen en diversos contextos. Al respecto:
- comprenden que ellas se realizan respecto de un punto y en un ángulo dado
 - reconocen rotaciones de figuras en contextos diversos, por ejemplo, en física
4. Reconocen transformaciones isométricas en contextos diversos; por ejemplo, en diferentes teselaciones de M. C. Escher (www.mcescher.com).

AE 2

Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas.

Actividades

1. Reconocen propiedades de la traslación.

Observaciones al docente

El docente puede guiar a los estudiantes, diciéndoles que observen lo que sucede cuando dos puntos (A y B) se trasladan a puntos A' y B' respectivamente.

Se aconseja que revise las observaciones y que juntos concluyan que:

- $AB=A'B'$ y $AA'=BB'$
- $AA'B'B$ es un paralelogramo

2. Los estudiantes giran dos puntos (A y B) respecto de un mismo punto y en un mismo ángulo, y reconocen propiedades de la rotación.

AE 3

Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, utilizando regla y compás o procesadores geométricos.

Actividades

1. Trasladan figuras como triángulos, cuadriláteros y pentágonos con respecto de vectores dados, utilizando regla y compás.
2. Rotan figuras como triángulos respecto de puntos y ángulos dados, utilizando regla y compás.
3. Reflejan figuras en el plano (triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos) respecto de rectas dadas.

Observaciones al docente

Se sugiere:

- mostrar que basta con trasladar los vértices de las figuras en cuestión para trasladar la figura completa
- trabajar con los alumnos para que entiendan cómo determinar el vector de traslación cuando hay figuras que han sido trasladadas
- reconocer punto y ángulo de rotación, dado un triángulo al que se aplicó una rotación
- repasar la construcción de rectas perpendiculares
- mostrar que basta con reflejar los vértices de los polígonos para que esa figura quede reflejada; los estudiantes pueden determinar el eje de simetría de una reflexión cuando observan figuras reflejadas

AE 4

Teselar el plano con polígonos regulares, utilizando regla y compás o procesadores geométricos.

AE 5

Utilizar las transformaciones isométricas como herramienta para realizar teselaciones regulares y teselaciones semirregulares.

Actividades

1. Determinan las posibles combinaciones de polígonos regulares con las que se puede teselar el plano. Para este propósito, se les pide encontrar los polígonos regulares de ángulos interiores $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ cuya suma $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 360^\circ$

Observaciones al docente

Se sugiere que presente una combinación de polígonos regulares que satisfacen la condición de teselación y que explique la estrategia que se usó.

Puede pedir que, mediante ensayo y error, encuentren las combinaciones de polígonos regulares donde la suma de los ángulos interiores de cada uno de ellos sea 360° .

2. Teselan el plano solamente con polígonos regulares de un tipo, utilizando regla y compás o procesadores geométricos. Por ejemplo: con hexágonos regulares (con regla y compás).
3. Construyen la configuración base de una teselación semirregular, utilizando regla y compás. Por ejemplo, construyen la configuración que generan un dodecágono regular, un hexágono regular y un cuadrado, todos de igual medida.
4. Aplican transformaciones isométricas a la configuración base para teselar una región determinada del plano. Por ejemplo, aplican transformaciones isométricas a la configuración formada por dos octógonos y un cuadrado.

AE 6

Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos.

Actividades

1. A partir de la definición de lugar geométrico, construyen los conceptos de circunferencia y círculo.
2. Utilizando diversa bibliografía, indagan en grupos acerca de las formas de calcular el número π ; por ejemplo, la razón entre el perímetro de la circunferencia y la longitud de su diámetro.

Observaciones al docente

En la actividad de indagación, se sugiere que el docente guíe los avances de cada grupo. Sin embargo, cada estudiante se compromete responsablemente con su rol en el equipo, investiga con seriedad en las fuentes y participa activamente en las conclusiones que obtienen.

AE 7

Calcular el perímetro de circunferencias y de arcos de ellas.

Actividades

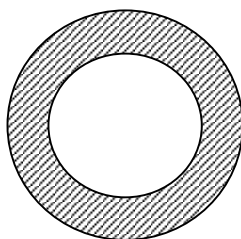
1. Calcular perímetros de circunferencias de diámetro conocido.
2. Calcular el radio de una circunferencia, conocido su perímetro.
3. Conocida la medida de un arco de circunferencia, calculan el ángulo asociado a él.

AE 8

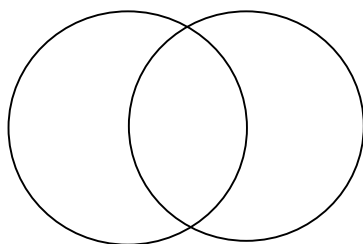
Calcular el área del círculo y de sectores de él.

Actividades

1. Calcular áreas de superficies donde intervienen círculos. Por ejemplo:
 - calcular el área achurada, sabiendo que las circunferencias son concéntricas y que los radios de la mayor y la menor son, respectivamente, de 10 cm. y 8 cm.



2. Deducen que la expresión $\frac{\pi r^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$ es el área de un sector circular de ángulo α , elaboran estrategias para calcular áreas relativas a sectores circulares y aplican la expresión generada en contextos diversos. Por ejemplo, elaboran una estrategia para determinar el área de la superficie comprendida entre dos círculos de 3 cm. de radio que pasan, cada uno, por el centro del otro círculo.

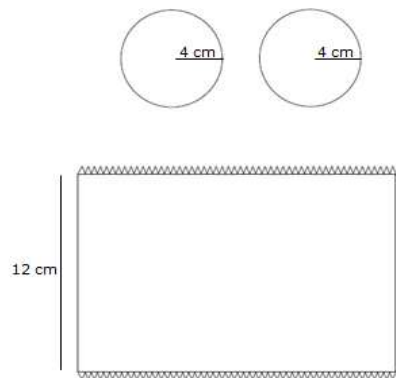
**AE 9**

Calcular medidas de superficies de cilindros, conos y pirámides, utilizando fórmulas.

Actividades

1. Utilizando las redes del cilindro, el cono y diferentes pirámides, conjeturan en grupos acerca de las estrategias de cálculo de las superficies de estos cuerpos geométricos. Por ejemplo:

- calculan el área total de un cilindro con los datos de la figura: base de radio 4 cm. y altura 12 cm.



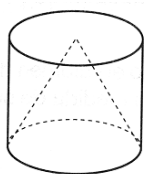
- generalizan el resultado para obtener una expresión que represente el área total de un cilindro
2. Calculan volúmenes de figuras donde intervienen conos y cilindros, en situaciones del tipo:
- Un octavo básico, con el afán de reunir dinero, realiza una venta de jugos de piña. Para esto, Francisco diseña 2 envases; uno con forma de cono de altura 12 cm. y radio 9 cm. y una pirámide de base cuadrada cuyas medidas son: lado del cuadrado 12 cm. y altura de la pirámide 9 cm. Si prepararon 500.000 cc. de jugo:
 - ¿de qué envase se necesita menos cantidad para envasar todo el jugo?
 - ¿cuántos envases de cada tipo se requieren para envasar el jugo?

AE 10

Calcular volúmenes de cilindros y conos utilizando fórmulas.

Actividades

1. Verifican, usando diversas estrategias, que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro de la misma altura y radio:



2. Determinan las dimensiones de tres cilindros expresándolas en cm. con los que se puede envasar 1 metro cúbico de líquido.

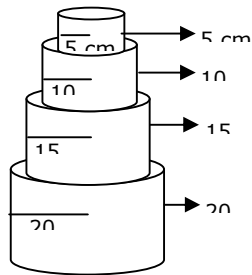
AE 11

Resolver problemas en contextos diversos relativos a cálculos de:

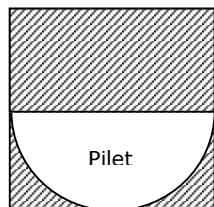
- perímetros de circunferencias y áreas de círculos
- áreas de superficies de cilindros, conos y pirámides
- volúmenes de cilindros y conos

Actividades

1. Resuelven problemas que involucran cálculo de volúmenes de cilindros y conos del tipo:
 - calculan el volumen total que ocupan las cuatro cajas cilíndricas para guardar sombreros.



2. Resuelven problemas relativos a cálculos de longitudes de circunferencia en contextos geométricos. Por ejemplo:
 - calculan el perímetro de una circunferencia inscrita en un cuadrado de área conocida
 - determinan la cantidad de alambre necesaria para cercar una superficie de forma circular
3. Elaboran estrategias para determinar longitudes de arcos de circunferencia y las aplican en contextos diversos.
 - Por ejemplo, aplican las estrategias elaboradas para determinar la longitud del arco de circunferencia que describe un faro al girar 120° a dos millas marinas del faro, dado que una milla marina equivale a 1.852 metros.
4. Resuelven problemas que involucran cálculo de áreas de circunferencias del tipo:
 - En un jardín cuadrado se quiere sembrar pasto y dejar espacio para instalar una pileta con forma de semicircunferencia, como indica la figura. Calcular el área en que se sembrará pasto, sabiendo que el lado del jardín mide 8 m.



5. ③ Aplican los conocimientos referidos a áreas de superficies para resolver problemas del tipo:

- Para restaurar una pirámide, un grupo de expertos decidió pintarla con un compuesto especial. La pirámide tiene base cuadrada de lado 10 metros y su altura es de 12 metros. Si un tarro del compuesto especial tiene la capacidad de pintar 1 m^2 , ¿cuántos tarros se necesitan?

Observaciones al docente

Se sugiere al docente que establezca la relación que existe entre el lado de un cuadrado y su diagonal. Es importante que los estudiantes verifiquen esta relación en casos particulares.

Ejemplos de evaluación

Aprendizaje Esperado

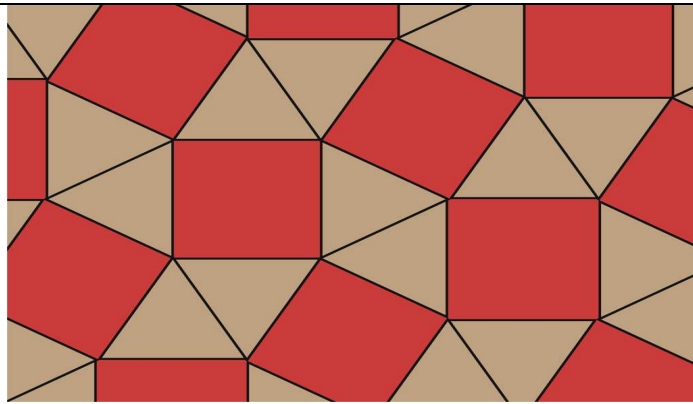
Utilizar las transformaciones isométricas como herramienta para realizar teselaciones regulares y teselaciones semirregulares.

Indicadores de Evaluación

- Teselan el plano con un solo polígono regular, utilizando traslaciones y reflexiones.
- Construyen la configuración base de una teselación con más de un polígono regular, utilizando transformaciones isométricas.

Actividad propuesta

A continuación se presenta un teselado. Responda a las preguntas propuestas:



- ¿Qué tipo de teselado es el de la figura?
- ¿Cuál es el patrón seguido en el teselado de la figura?
- ¿Qué tipo de triángulo se utilizó para construir el teselado de la figura? Justifica.
- ¿Es posible construir un teselado con un cuadrado y un triángulo isósceles? ¿Por qué?
- ¿Con qué transformaciones isométricas se puede construir este teselado? ¿Aplicadas sobre qué figura? Justifique.

Criterios de evaluación

Al evaluar, considerar los siguientes criterios:

- Identifican patrones en el teselado.
- Explican las condiciones que deben cumplir los polígonos en un teselado.
- Indican las combinaciones posibles de polígonos en un teselado.
- Identifican las transformaciones isométricas aplicables para construir el teselado.

SEMESTRE 2

UNIDAD 3 Datos y Azar

Propósito

En esta unidad, los estudiantes profundizan en lo que ya han aprendido sobre datos y azar en cursos anteriores.

En datos (estadística) los estudiantes aprenderán a construir e interpretar tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos. El énfasis está en el análisis de diferentes situaciones que impliquen tomar decisiones respecto de la pertinencia o no de agrupar datos en intervalos y cuál es un número "razonable" de ellos. Se espera que los estudiantes comprendan las ventajas y desventajas de agrupar datos, en función de la información que se gana o pierde. A su vez, se espera que sean capaces de interpretar y producir información, en diversos contextos, utilizando medidas de tendencia central para datos agrupados. Por último, se profundiza en los conceptos de población y muestra introducidos en 6º básico, avanzando en la comprensión del concepto de aleatoriedad al momento de usar muestras y su importancia en la realización de inferencias acerca de la población.

En azar (probabilidades) se aborda la probabilidad desde un punto de vista teórico con la introducción del modelo de Laplace; aunque la experimentación con el uso de tablas de frecuencias y gráficos sigue siendo importante en este nivel. En esta unidad se espera que los estudiantes sean capaces de comparar resultados experimentales con resultados teóricos, por lo que será importante el uso de herramientas tecnológicas que permitan simular un gran número de veces un cierto experimento aleatorio y contrastar el gráfico experimental con el gráfico teórico. Por último, se espera que los estudiantes comprendan los conceptos de espacio muestral, evento y eventos equiprobables.

Conceptos clave

Datos agrupados en intervalos, frecuencias de datos agrupados, muestras aleatorias, equiprobabilidad, espacio muestral, modelo de Laplace.

Prerrequisitos

- Población y muestra
- Frecuencias absolutas y relativas
- Experimento aleatorio
- Probabilidad de un evento
- Gráficos de frecuencia

Contenidos disciplinares

- Intervalos
- Amplitud de un intervalo
- Marca de clase de un intervalo
- Tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos
- Media aritmética y moda para datos agrupados en intervalos
- Muestreo aleatorio simple
- Equiprobabilidad de eventos
- Principio multiplicativo
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio
- Probabilidad teórica de un evento
- Modelo de Laplace
- Condiciones del modelo de Laplace: finitud del espacio muestral y equiprobabilidad

Habilidades

- Resolver problemas en los cuales es necesario interpretar información a partir de tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos
- Construir tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, en forma manual y mediante herramientas tecnológicas
- Decidir sobre el tipo de muestra en algunos experimentos aleatorios para inferir sobre las características de poblaciones, ejemplifican
- Analizar el comportamiento de una muestra de datos, usando medidas de tendencia central y argumentación acerca de la información que ellas entregan
- Identificar el conjunto de los resultados posibles en experimentos aleatorios simples (espacio muestral) y los eventos o sucesos como subconjuntos de aquel
- Utilizar el principio multiplicativo para obtener la cardinalidad del espacio muestral y de los sucesos o eventos
- Verificar si un experimento aleatorio cumple con las condiciones del modelo de Laplace
- Asignar en forma teórica la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio utilizando el modelo de Laplace

Actitudes

- Perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos
- Trabajo en equipo e iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

Aprendizajes Esperados	Sugerencias de indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Interpretar información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican tablas de frecuencias con datos agrupados. • Comprenden el significado de la frecuencia de un intervalo en una tabla de frecuencias con datos agrupados. • Obtienen información, de diversos contextos, mediante el análisis de datos presentados en tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos.
2. Representar datos, provenientes de diversas fuentes, en tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos.	<ul style="list-style-type: none"> • Explican la pertinencia y ventajas de representar un conjunto de datos, a través de una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos. • Aplican criterio para decidir el número de intervalos apropiados para agrupar un conjunto de datos. • Construyen tablas de frecuencia, con datos agrupados en intervalos, en forma manual y mediante herramientas tecnológicas.
3. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, extendiendo al caso de datos agrupados en intervalos.	<ul style="list-style-type: none"> • Determinan la media a partir de una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos, y la interpretan de acuerdo al contexto. • Determinan la moda, a partir de una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos, y la interpretan de acuerdo al contexto. • Extraen información desde datos numéricos agrupados en intervalos y resumidos a través de la media o moda

	<p>relacionados con una situación o fenómeno.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretan información, en diferentes contextos, a través del uso de medidas de tendencia central. • Evalúan la pertinencia del uso de las medidas de tendencia central, de acuerdo al tipo de datos involucrados. • Comparan información respecto de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central y comunican sus conclusiones.
4. Comprender el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia en la realización de inferencias.	<ul style="list-style-type: none"> • Establecen estrategias para escoger muestras en forma aleatoria de un determinado tamaño, desde una población específica. • Utilizan un recurso tecnológico, por ejemplo, una calculadora, para generar números aleatorios y usarlos para extraer una muestra desde una población específica. • Argumentan acerca de la importancia de extraer muestras en forma aleatoria para las conclusiones que se puedan realizar acerca de una población.
5. Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.	<ul style="list-style-type: none"> • Describen el espacio muestral de un experimento aleatorio dado y obtienen su cardinalidad. • Argumentan acerca de la equiprobabilidad de cada resultado posible en un experimento aleatorio, realizando una simulación con apoyo de la tecnología. Por ejemplo, al lanzar un dado. • Determinan la probabilidad de ocurrencia de un cierto evento en un experimento aleatorio, mediante el modelo de Laplace. • Comparan el valor de la probabilidad de un cierto evento en un experimento aleatorio, obtenido mediante el modelo de Laplace, con el valor de la frecuencia relativa obtenida al simular el experimento un gran número de veces mediante el uso de la tecnología, y comunican sus conclusiones. • Comparan el gráfico teórico de los resultados de un experimento aleatorio, obtenido a través del modelo de Laplace, y el gráfico de las frecuencias relativas del mismo experimento simulado mediante el uso de tecnología, y comunican sus conclusiones.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos

- Seguir los pasos indicados hasta completar su trabajo
- Proponer interpretaciones originales de los datos
- Es metódico o metódica en el uso de las fuentes de información

Trabajo en equipo e iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

- Es responsable en trabajos grupales
- Participa activamente en actividades grupales

- Toma iniciativa en actividades de carácter grupal
- Propone alternativas de solución a problemas matemáticos en actividades grupales

Orientaciones didácticas para la unidad

Tal como lo sugieren los Aprendizajes Esperados, esta unidad se conecta naturalmente con los Objetivos Fundamentales Transversales. A través del trabajo propuesto en Datos y Azar, se puede incentivar el interés por conocer la realidad y la búsqueda de la información en diversas fuentes. Por otro lado, aparte de una actitud crítica frente a la información, también interesa que los estudiantes sean originales en sus interpretaciones, metódicos en el uso de las fuentes de información y, de igual modo, activos y responsables en el trabajo grupal.

En la parte estadística (Datos) es importante trabajar con contextos que sean de interés para los estudiantes. Por ello se sugiere que estos sean extraídos desde diarios, revistas o Internet, de modo que los estudiantes vean que esta dimensión de la matemática está en conexión con la vida cotidiana y es una herramienta para interpretar y modelar la realidad a través de diversas representaciones. Para este nivel, se sugiere analizar diferentes situaciones que impliquen tomar decisiones sobre agrupar datos en intervalos y cuál sería un número "razonable" de ellos. Para este caso se sugiere profundizar en las medidas de tendencia central, esta vez considerando los datos agrupados en intervalos. En cuanto a los conceptos de población y muestra, se recomienda proponer a los estudiantes discusiones relacionadas con las formas de seleccionar una muestra, enfatizando en el aspecto de aleatoriedad y la validez de las conclusiones o inferencias respecto de la población. Se sugiere el uso de algún recurso tecnológico (calculadora, por ejemplo) para generar números aleatorios.

En la parte de probabilidades (azar) se recomienda proponer a los estudiantes diversas situaciones y experimentos aleatorios, en los que puedan determinar el espacio muestral conjunto de todos los resultados posibles y los eventos como subconjuntos de dicho espacio muestral. Por ejemplo, en el caso del lanzamiento de dos dados existen 36 combinaciones posibles de las caras de los dados. Es importante que los estudiantes verifiquen este resultado y, luego, sean capaces de determinar otros eventos (subconjuntos), como: "que la suma sea igual a 7", o bien "que la suma sea un múltiplo de 3". Se sugiere, posteriormente, trabajar con el modelo de Laplace, determinando los "casos favorables" y los "casos posibles o totales". Es importante que los estudiantes comprendan que lo primero corresponde a la cardinalidad del espacio muestral y lo segundo a la cardinalidad del subconjunto o evento. Cabe destacar que los estudiantes ya vienen trabajando desde años anteriores con las frecuencias relativas, de modo que en este nivel los estudiantes tienen la posibilidad de contrastar el modelo experimental (frecuencias relativas) y el modelo teórico (Laplace). De hecho, el camino hacia las probabilidades ha sido justamente ese: de lo experimental a lo teórico. Se sugiere que en este nivel los estudiantes comparen el gráfico de las frecuencias relativas (tras un gran número de iteraciones por medio de la tecnología) con el gráfico de las probabilidades obtenidas por la regla de Laplace. Por ejemplo, aplicado al experimento de la suma de dos dados.

Un tema importante será que los estudiantes tengan claridad en las condiciones que permiten aplicar el modelo de Laplace. En esto será clave la comprensión acerca de la equiprobabilidad de los eventos elementales y que el espacio muestral debe ser finito. Se sugiere al docente que trabaje algunos ejemplos donde el modelo de Laplace no se puede aplicar directamente.

AE 1

Interpretar información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Actividad

1. Dada una tabla de frecuencias por intervalos, calculan los valores de cada frecuencia relativa y relativa porcentual. Por ejemplo, en la tabla siguiente se muestran las notas (promedios) de los estudiantes de un curso al finalizar el segundo trimestre en la asignatura de matemática:

Intervalos de Notas	Punto medio ⁸	Frecuencia ⁹	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[1,0 – 2,0]	1,5	4		
[2,0 – 3,0]	2,5	6		
[3,0 – 4,0]	3,5	3		
[4,0 – 5,0]	4,5	14		
[5,0 – 6,0]	5,5	9		
[6,0 – 7,0]	6,5	4		
	Total	40		

2. Escriben en su cuaderno las respuestas a las preguntas planteadas por el profesor, extrayendo la información de la tabla y visualizando la utilidad de cada columna de frecuencias. Por ejemplo:

- ¿qué porcentaje de estudiantes tiene nota mayor o igual a 4,0?
- ¿qué porcentaje de alumnos obtiene nota "roja" en la asignatura en el segundo trimestre?

③. Obtienen información de diversos medios de comunicación que esté presentada en tablas de frecuencia con datos agrupados por intervalos, la registran en sus cuadernos y la ponen en común, verificando la pertinencia de la información que entregan las columnas de frecuencias. Por ejemplo, según un estudio¹⁰ sobre el uso de facebook (403 individuos) se obtuvo la siguiente información, considerando el tiempo que permanecen conectados:

Tiempo conectado	Porcentaje
5 a 29 min.	48%
30 a 59 min.	22%
1 a 3 horas	25%
Todo el día conectado	5%
Total	

Responden preguntas del tipo:

- ¿cuántos individuos se conectan entre 30 a 59 min.?
- ¿cuál es la moda del conjunto de datos?
- en promedio, ¿cuánto tiempo se conectan las personas?

⁸ También conocido como "Marca de Clase".

⁹ También denominada "Frecuencia Absoluta".

¹⁰ Estudio CADEM Research Facebook, el fenómeno en Chile. Agosto 2008.
www.cadem.cl/media/temas/documentos/Estudio_Facebook.pdf

AE 2

Representar datos, provenientes de diversas fuentes, en tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos.

Actividad

1. Obtienen información de todos los estudiantes del curso con respecto de su estatura y a su número de hermanos. A partir de esto, el docente explicita la necesidad de trabajar con tablas de datos simples y tablas de datos agrupados por intervalos.
2. Registran las estaturas de los estudiantes en una lista y presentar datos en tablas de frecuencia con datos agrupados.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente realizar esta actividad en grupo. Después de registrar los datos en una lista, los distintos grupos representarán los datos obtenidos en tablas de frecuencia con datos agrupados. Cada grupo decidirá sobre el número de intervalos a utilizar.

Es recomendable que los estudiantes tengan la oportunidad de discutir y decidir cuándo es apropiado usar intervalos, en función del tipo de datos y el propósito de lo que se quiere presentar.

Es recomendable utilizar una planilla electrónica para simplificar los cálculos de los elementos de la tabla.

3. Recopilan datos de interés en los medios de comunicación. Por ejemplo, ingresan a la página del Servicio Sismológico de la Universidad de Chile¹¹ y obtienen la actividad sísmica de los últimos 2 días:

Fecha-hora Local	Magnitud	Sensible	Localidad
2010/10/25 17:18:24	3	No	18 km al NO de Pichilemu
2010/10/25 16:25:28	3.2	No	26 km al NE de Calama
2010/10/25 15:28:48	3.4	No	26 km al NE de Calama
2010/10/25 15:18:00	3.7	Sí	64 km al NO de Valparaíso
2010/10/25 14:04:05	3.5	No	134 km al SE de Vallenar
2010/10/25 13:14:11	3.3	No	25 km al N de Pichilemu
2010/10/25 10:54:52	3.2	No	24 km al O de Navidad
2010/10/25 04:45:18	4.2	Sí	57 km al NO de Constitución
2010/10/25 04:20:41	3.4	No	23 km al O de Pichilemu
2010/10/25 03:10:07	4.5	Sí	56 km al O de Cobquecura
2010/10/25 02:45:38	4.1	Sí	64 km al NO de Cobquecura
2010/10/24 23:03:12	2.3	No	32 km al SE de Navidad
2010/10/24 22:26:06	3.7	Sí	42 km al O de San Antonio
2010/10/24 19:56:27	4.9	Sí	16 km al O de La Serena
2010/10/24 18:11:21	4.4	Sí	27 km al S de Rancagua
2010/10/24 13:44:41	4.1	Sí	19 km al NO de Melipilla
2010/10/24 13:39:06	3	No	42 km al S de Pichilemu
2010/10/24 07:59:18	3	No	47 km al NO de Pichilemu
2010/10/24 07:53:09	4.6	Sí	52 km al NO de Arauco
2010/10/24 07:47:00	4.8	No	85 km al SE de Ollagüe
2010/10/24 06:44:50	2.7	No	17 km al O de Navidad

¹¹ www.sismologia.cl

2010/10/24 03:19:36	2.7	No	27 km al SE de Pichilemu
2010/10/23 23:59:07	2.5	No	22 km al SO de Los Vilos
2010/10/23 23:54:08	2.9	No	13 km al NO de La Ligua
2010/10/23 22:55:43	2.9	No	81 km al O de San Antonio

4. Construyen tablas sencillas por intervalos, verificando que la cantidad de intervalos debe simplificar la presentación de los datos y no debe dejar que se pierda información importante.

Observaciones al docente

Hacer notar a los estudiantes que la variable en cuestión corresponde a la magnitud del sismo, y sobre la cual se deben construir los intervalos. Para la construcción es necesario identificar la magnitud mínima y la máxima.

AE 3

Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, extendiendo al caso de datos agrupados en intervalos.

Actividad

1. A partir de una tabla de frecuencias simple obtenida a partir de datos de su interés, calculan la media de la muestra (promedio ponderado) y su moda. Por ejemplo, si se considera el consumo eléctrico mensual de un hogar en KWH.

KWH	Punto medio ¹²	Frecuencia ¹³
[144 - 170]		6
[170 - 196]		6
[196 - 222]		5
[222 - 248]		7
[248 - 274]		4
[274 - 300]		2
Total		30

2. Construyen en sus cuadernos una tabla por intervalos con información y completan las columnas de frecuencias. Por ejemplo, a partir de los puntajes obtenidos en la PSU por los estudiantes de un establecimiento educacional:

361	543	640	475	321	370	553	431	555	245
728	658	742	321	420	573	660	410	770	445
225	351	800	410	729	777	389	520	478	545
601	417	430	630	562	518	383	820	330	645
780	515	427	625	651	478	760	555	400	745
435	552	368	490	620	328	500	470	690	800
458	584	451	610	381	504	677	478	643	790
460	325	531	679	780	800	600	580	390	700

¹² Marca de Clase.

¹³ Frecuencia Absoluta.

3. Calculan las marcas de clase o puntos medios de cada intervalo.
4. Escriben en su cuaderno conjeturas acerca de procedimientos para calcular la media y la moda en este conjunto de datos agrupados por intervalos. Verifican sus conjeturas con ayuda del profesor, quien les proporciona algunos métodos usuales.
5. A partir de distintas tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos que proporciona el profesor, calculan la media y la moda. Escriben el significado de estos valores de acuerdo al contexto del problema.
6. Registran conclusiones a partir de distintos experimentos y encuestas obtenidos de distintos medios de comunicación, de los cuales se conoce la media y/o la moda. Verifican que, en ocasiones, estas medidas pueden no ser representativas.
7. Comparan dos conjuntos de datos y calculan e interpretan sus medidas de tendencia central, visualizando la importancia de la aleatoriedad de la muestra. Por ejemplo, la misma encuesta para dos muestras distintas.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente enfatizar en el uso de la marca de clase (punto medio) como un valor de la variable, representativo del intervalo que corresponde, considerando que al tabular de esta manera, se gana en organización y presentación de los datos pero se pierde en exactitud.

Como criterio, se pedirá a los grupos estimar el promedio de los datos utilizando los datos agrupados y comparar con el promedio real.

En esta actividad se sugiere retomar la actividad del registro de estaturas por grupo. Dado que deben trabajar las medidas de tendencia central, es importante que los estudiantes verifiquen las formas de obtener dichas medidas a partir de un conjunto de datos agrupados. Por ejemplo, en el caso de la media aritmética se define el "punto medio" del intervalo y con este valor, como representante, se obtiene la media aritmética con el mismo procedimiento que para el caso de datos no agrupados. Vale aquí el ejercicio de comprobar qué tan cercanos están la media aritmética obtenida, con los datos sin agrupar, y la media aritmética con datos agrupados utilizando el punto medio.

AE 4

Comprender el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia en la realización de inferencias.

Actividad

1. Escriben en su cuaderno las condiciones necesarias para asegurar la aleatoriedad de una muestra.
2. A partir de una lista, clasifican las muestras en aleatorias y no aleatorias.
3. Extraen información y datos de estudios públicos de diferentes medios de comunicación y escriben las especificaciones de cada muestra escogida.
4. Ponen en común los estudios recopilados y la información de sus respectivas muestras en grupos.
5. Analizan los resultados de dos encuestas distintas en un contexto significativo, una sobre una muestra aleatoria y la otra no. Escriben en su cuaderno la importancia de la aleatoriedad de una muestra.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente guiar a los alumnos en algunos experimentos o encuestas para alcanzar el aprendizaje esperado.

AE 5

Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.

Actividad

1. Escriben por extensión en sus cuadernos los elementos de los espacios muestrales de distintos experimentos.
Por ejemplo:
 - escribir el espacio muestral de "lanzar dos monedas al aire".
2. Lanzan un dado 20 veces cada uno en grupos de 4 o 5 alumnos. Observan y registran en sus cuadernos la frecuencia relativa de cada resultado (equiprobables).
3. Realizan el lanzamiento de dos dados una gran cantidad de veces y registran los resultados para la suma de los puntajes de las caras. Utilizan apoyo de la tecnología y grafican.
4. Determinan las combinaciones posibles para el lanzamiento de dos dados y grafican los resultados "teóricos" para la suma de las caras. Utilizan un gráfico de barras para estos resultados ideales. Responden a la pregunta ¿qué suma tiene más probabilidades de salir?
5. Comparan el gráfico asociado a las frecuencias relativas (experimental) con el gráfico de barras ideal, respecto del experimento de la suma de los dados. Sacan conclusiones al respecto.
6. Calculan probabilidades de eventos asociados al experimento con dados mediante el modelo de Laplace. Por ejemplo, determinan la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma sea menor o igual a 5.
7. Comparan la probabilidad teórica con la frecuencia relativa en el experimento de lanzar 100 veces una moneda. Aumentan el número de lanzamientos usando un recurso tecnológico.

Observaciones al docente

Es importante que los estudiantes realicen completamente la experiencia e identifiquen cada etapa del proceso.

Es importante motivar a los estudiantes a que permanentemente realicen conjeturas acerca del resultado del lanzamiento del dado. Además, como es un contexto lúdico, es recomendable que la experiencia se maneje en términos de "apuestas". Ellos deberían partir con una apuesta inicial; sin embargo, a medida que se realice el experimento puede que sus conjeturas vayan cambiando y modifiquen su apuesta.

Lo fundamental del trabajo con estas actividades es la capacidad de observar los patrones o regularidades respecto de las frecuencias relativas porcentuales para cada resultado. En esto los gráficos cumplen una función importante, ya que los estudiantes pueden constatar sus conjeturas en forma visual, es decir, pueden "ver" lo que está pasando.

Por lo anterior, cobra relevancia el uso de herramientas tecnológicas que permitan simular experimentos aleatorios una gran cantidad de iteraciones. De este modo, los estudiantes pueden establecer conclusiones al observar patrones, los cuales con pocos lanzamientos sería muy difícil observar.

Es necesario que los estudiantes, en cada etapa, utilicen la misma escala y la frecuencia relativa porcentual para poder comparar los gráficos.

Esta actividad se presta para la utilización de un simulador de lanzamientos.

Ejemplo de evaluación

Aprendizaje Esperado

Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.

Indicadores de Evaluación

- Describen el espacio muestral de un experimento aleatorio dado y obtienen su cardinalidad
- Argumentan acerca de la equiprobabilidad de cada resultado posible en un experimento aleatorio, realizando una simulación con apoyo de la tecnología. Por ejemplo, al lanzar un dado
- Determinan la probabilidad de ocurrencia de un cierto evento en un experimento aleatorio, mediante el modelo de Laplace
- Comparan el valor de la probabilidad de un cierto evento en un experimento aleatorio, obtenido mediante el modelo de Laplace, con el valor de la frecuencia relativa obtenida al simular el experimento un gran número de veces mediante el uso de la tecnología, y comunican sus conclusiones
- Comparan el gráfico teórico de los resultados de un experimento aleatorio, obtenido a través del modelo de Laplace, y el gráfico de las frecuencias relativas del mismo experimento simulado mediante el uso de tecnología, y comunican sus conclusiones

Actividad propuesta

Lea cuidadosamente la situación dada. Responda las preguntas propuestas.

Ernesto y Rosa juegan con monedas. El juego consiste en lanzar una moneda dos veces; primero lanza uno (Rosa, por ejemplo), luego el otro y después se alternan. Si en ambos lanzamientos salen caras o en ambos sello, gana Rosa, pero si salen distintas –en el primero cara y en el segundo sello o viceversa–, gana Ernesto.

Preguntas:

- En una instancia del juego, ¿cual es el espacio muestral?, ¿cuántos elementos tiene?
- ¿Cuál es la probabilidad teórica de que gane Rosa?
- Los elementos del espacio muestral, ¿tienen igual probabilidad de ocurrencia?, ¿por qué?
- Si al repetir 100 veces el juego, se obtiene la siguiente tabla de frecuencias:

Resultados	Frecuencia
cc	22
cs	24
sc	28
ss	26

- compare gráficamente los resultados obtenidos en la repetición del experimento con los teóricos. ¿A qué atribuye la diferencia?
- ¿cuál es la probabilidad, según la tabla, que gane Ernesto en el juego?
- ¿Es un juego justo?

Criterios de evaluación

Al evaluar, considerar los siguientes criterios:

1. Describen el espacio muestral y determinan su cardinalidad.
2. Argumentan sobre la equiprobabilidad de ocurrencia de los elementos del espacio muestral.
3. Aplican el modelo de Laplace para calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento.
4. comparan las probabilidades de ocurrencia, aplicando Laplace y las frecuencias relativas.
5. Comparan gráficamente las probabilidades teóricas y empíricas.

UNIDAD 4

Álgebra

Propósito

En la unidad de álgebra los estudiantes comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Por una parte, la idea es desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vincularlo a conceptos matemáticos ya trabajados en años anteriores. Por otra parte, en el trabajo propuesto los estudiantes deben reconocer conceptos clave como dominio y recorrido, lo que introduce algunos elementos de lenguaje conjuntista.

En este nivel el trabajo con ecuaciones progresa hacia el planteamiento y resolución de ecuaciones con más de una incógnita. Por ejemplo, ecuaciones que representan relaciones físicas, fórmulas geométricas o expresiones que reflejen situaciones de la vida cotidiana, que resulten interesantes para los estudiantes.

La unidad ofrece también la posibilidad de visitar nuevamente tópicos relativos a proporcionalidad directa e inversa, pero con mayor énfasis en el concepto de variación proporcional y tratado desde el punto de vista algebraico. Todo esto se incorpora al repertorio de temas que aportan al desarrollo del razonamiento matemático, en especial, la capacidad para realizar representaciones de objetos abstractos.

Conceptos clave

Variable, variación proporcional y no proporcional, variación proporcional directa, variación proporcional inversa, función, dominio y recorrido de una función, ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Prerrequisitos

- Proporcionalidad directa e inversa
- Representación gráfica de la proporcionalidad directa e inversa
- Resolución de problemas que impliquen plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita

Contenidos disciplinares

- Situaciones de variación proporcional y no proporcional
- Situaciones de variación proporcional directa e inversa
- Concepto de función y sus diferentes representaciones
- Dominio y recorrido de funciones
- Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita

Habilidades

- Identificar situaciones de variación proporcional y no proporcional
- Resolver problemas que involucran variación proporcional directa
- Resolver problemas que involucran variación proporcional inversa
- Reconocer funciones en diversos contextos
- Identificar dominio y recorrido de funciones en diversos contextos
- Resolver problemas que involucran funciones en diversos contextos
- Plantear y resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Actitudes

- Trabajo en equipo y muestra iniciativa personal para resolver problemas en contextos diversos

Aprendizajes Esperados	Sugerencias de indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican las variables que están involucradas en situaciones de la vida cotidiana. • Despejan una variable en función de la otra en ecuaciones que tienen dos incógnitas. • Evalúan ecuaciones planteadas en función del contexto del problema.
2. Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican el dominio y recorrido de una función. • Identifican variables dependientes de otras variables en diversas situaciones. • Dan ejemplos de funciones en contextos cercanos. • Utilizan notaciones empleadas en funciones para expresar dependencias de variables.
3. Identificar variables relacionadas en forma proporcional y en forma no proporcional.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican en un contexto determinado, variables que dependen proporcionalmente de otras variables. • Identifican en un contexto determinado, dependencias no proporcionales. • Identifican la constante de proporcionalidad en dependencias proporcionales. • Comparan el cociente entre valores asignados a variables para identificar una relación de proporcionalidad directa entre variables. • Comparan el producto entre valores asignados a variables para identificar una relación de proporcionalidad inversa entre variables. • Utilizan la constante de proporcionalidad para argumentar la proporcionalidad directa e inversa entre variables.
4. Analizar, mediante el uso de softwares gráficos, situaciones de proporcionalidad.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican, utilizando softwares gráficos, situaciones asociadas a proporcionalidad directa. • Utilizan softwares gráficos para identificar situaciones asociadas a proporcionalidad inversa. • Analizan, utilizando softwares gráficos, datos representativos de situaciones para determinar si estas son proporcionales.
5. Resolver problemas en diversos contextos que implican proporcionalidad directa y problemas que implican proporcionalidad inversa.	<ul style="list-style-type: none"> • Obtienen ecuaciones de situaciones asociadas a proporcionalidad directa. • Determinan la constante de proporcionalidad en datos que varían proporcionalmente y los utilizan para realizar cálculos. • Representan, en tablas y gráficos, relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre dos variables.

La unidad de álgebra se presenta por primera vez en el programa de estudio con autonomía de los temas tratados en números. Este hecho es particularmente relevante cuando se quiere analizar el enfoque de los temas propuestos en esta unidad.

En relación con tema de funciones, en esta oportunidad se propone desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vinculado a conceptos matemáticos que ya fueron trabajados años anteriores por los estudiantes, como la proporcionalidad directa e inversa. Interesa que los estudiantes analicen las funciones desde la relación entre dos variables y, en particular, distingan entre variables dependientes e independientes. Se abandona la clásica progresión que se iniciaba con una rigurosa definición del producto cartesiano, para luego definir el concepto de relación y terminar presentando las funciones como un caso particular de las relaciones.

Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el dominio y el recorrido de una función. Aunque el currículo no propone como tema el uso del lenguaje conjuntista, si el docente lo estima conveniente puede utilizar aquellos términos y conceptos relacionados con teoría de conjuntos que sean necesarios y faciliten el aprendizaje. Reconocer en una función el dominio y recorrido permite a los estudiantes distinguirlos de una relación cualquiera. El apoyo de tecnología, especialmente de aquellos *softwares* que permiten graficar funciones, le permitirán tanto al estudiante como al docente observar las distintas gráficas de cada función en estudio. Además, el uso de tecnología facilita la relación conceptual entre la expresión algebraica y su representación geométrica, relación que no es natural para la mayoría de los estudiantes. Una de las situaciones que se debe evitar es que los estudiantes trabajen con las expresiones algebraicas que representan relaciones o funciones sin comprender qué describen.

En este nivel, el trabajo con ecuaciones progresa hacia el planteamiento y resolución de ecuaciones con dos incógnitas en diversos contextos. El énfasis debe estar puesto en que los estudiantes comprendan que las variables de este tipo de ecuaciones pueden ser despejadas en función de la otra variable, y que el valor que puede tomar la incógnita dependerá del valor que tome la otra variable. Ejemplos clásicos pueden ser tomados de fórmulas que representan relaciones físicas. Por ejemplo: la frecuencia (f) de una onda y su período (T) están relacionados a través

de la ecuación: $f = \frac{1}{T}$

La unidad ofrece también la posibilidad de trabajar nuevamente tópicos relativos a proporcionalidad directa e inversa, con el agregado que al estar bajo el alero del álgebra se enriquece su trabajo y se potencia el concepto de variación proporcional. Por ejemplo, los estudiantes podrían concluir que al ser el cociente entre el perímetro y el diámetro de cualquier circunferencia siempre el mismo número, se trata de una relación directamente proporcional, interpretando

la igualdad $\frac{P}{D} = \pi$ como la expresión que representa dicha situación.

Esta es la oportunidad para introducir las representaciones algebraicas de una relación proporcional directa o inversa, y mostrar sus diferencias con representaciones de relaciones que no varían proporcionalmente, aunque cumplan con alguna de las características de las proporciones. Por ejemplo, es esperable para el nivel que los estudiantes identifiquen la expresión $y = 2^x + 1$ como una relación no proporcional, a pesar de que cuando una variable aumenta también lo hace la otra.

El trabajo en equipo facilita la discusión y análisis de situaciones problema, fomentando el liderazgo intelectual y el carácter, así como la asignación de roles. El trabajo en álgebra se presta favorablemente para alternar entre reflexión y estudio personal con el planteamiento y discusión de situaciones problemáticas.

AE 1

Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos.

Actividades

1. Identifican ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
2. Modelan situaciones de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Por ejemplo:
 - determinan la ecuación que permite conocer las maneras de envasar 50 kilos de azúcar en bolsas de 2 y 5 kilos
 - determinan la ecuación que permite conocer las maneras de juntar \$10.000 en monedas de \$100 y \$500

AE 2

Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas.

Actividades

1. Modelan situaciones en contextos cotidianos. Identifican variables independientes y otras dependientes de ellas, y establecen el término función. Por ejemplo, en la situación:
 - Marcos cotiza el revelado de fotos en una tienda. Por revelar el rollo le cobran \$1.000 y por cada foto que salga bien le cobran \$50. Decide calcular el revelador del rollo dependiendo del número de fotos. Obtiene la siguiente fórmula: $P = 1000 + 50F$, donde P es el precio que debe pagar por revelar F fotos
 - identifican la variable independiente y la variable dependiente
 - comprenden que la variable dependiente depende de la variable independiente, y a esta dependencia la llama función

Observaciones al docente

Se sugiere al docente mostrar modelamientos de situaciones antes de que los estudiantes intenten llegar a un modelo que represente una situación dada. Se sugiere además guiar al estudiante en el proceso de modelamiento.

2. Utilizan la notación $y = f(x)$ para identificar que y está en función de x . Por ejemplo, en la relación $b = 3a - 5$, identifican que b está en función de a y notan esta dependencia en la forma $b = f(a)$
 - En las siguientes igualdades identifican las variables dependiente e independiente y notan esta dependencia en la forma $y = f(x)$
 - $y = 3z - 4$
 - $c = a - 5$

Observaciones al docente

Se sugiere al docente mostrar distintos tipos de funciones en las que una variable dependa de otra variable. Adicionalmente se aconseja mostrar a modo de ejemplo dependencias de más de una variable.

3. Identifican dominios y determinan recorridos de funciones. Por ejemplo, determinan el recorrido de la función en la función $y = 2(x - 1)$, donde x toma los valores en el conjunto de los números naturales impares mayores que 5 y menores que 16.
4. Representan situaciones en contextos cotidianos a través de funciones.

AE**3**

Identificar variables relacionadas en forma proporcional y en forma no proporcional.

Actividades

1. Identifican situaciones que corresponden a variables relacionadas de manera proporcional y situaciones donde la variación no es proporcional. Al respecto, construyen una tabla con valores de las variables determinadas y a partir de cálculos realizados con ellas establecen si están relacionadas de manera proporcional.
2. Indagan en Internet acerca de situaciones que corresponden a variables relacionadas en forma proporcional y en forma no proporcional. Argumentando al respecto.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente mostrar variables que dependen de otra de manera proporcional. También se sugiere que deje lo más claro posible el significado matemático de este concepto.

AE 4

Analizar, mediante el uso de softwares gráficos, situaciones de proporcionalidad.

Actividades

1. Analizan datos correspondientes a situaciones en diversos contextos mediante el uso de softwares gráficos para determinar si las situaciones que representan estos datos son proporcionales.
2. Resuelven problemas relativos a magnitudes proporcionales utilizando softwares gráficos.

AE 5

Resolver problemas en diversos contextos que impliquen proporcionalidad directa y problemas que impliquen proporcionalidad inversa.

Actividades

1. Comprenden los conceptos de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa e identifican este tipo de cantidades en contextos diversos. Al respecto el docente podría presentar a los estudiantes situaciones donde:
 - una de las variables involucradas aumenta cuando la otra variable aumenta, pero que no son directamente proporcionales
2. Completan tablas asociadas a la función $y = kx$, y a la función $y = \frac{k}{x}$, donde k es una constante.
3. Calculan la constante de proporcionalidad en proporciones directas y en proporciones inversas, usando datos de la situación que representan, y la utilizan para obtener valores desconocidos de esa situación. Por ejemplo, calculan la constante de proporcionalidad en una proporción directa $y = kx$, si se sabe que $y = 5$ cuando $x = 10$, y la utilizan para calcular el valor de y cuando $x = 30$
4. Resuelven problemas que implican proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa en distintos contextos.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente mostrar distintas proporciones directas e inversas y reforzar el concepto matemático que implican estas dependencias mediante exposiciones gráficas.

<p>Aprendizaje Esperado Resolver problemas en diversos contextos que implican proporcionalidad directa y problemas que implican proporcionalidad inversa.</p>	
<p>Indicadores de Evaluación</p> <ul style="list-style-type: none"> • Obtienen ecuaciones de situaciones asociadas a proporcionalidad directa. • Determinan la constante de proporcionalidad en datos que varían proporcionalmente y los utilizan para realizar cálculos. • Representan en tablas y gráficos relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre dos variables. 	
<p>Actividad propuesta A continuación se entrega información relacionada con un hecho real. Lea cuidadosamente la información y responda a las preguntas propuestas.</p>	
<p><u>Rescate de los mineros</u></p> <p>De acuerdo con las noticias, el día 13 de octubre de madrugada se inició el rescate de los 33 mineros atrapados en el fondo de la mina San José. La velocidad con que la cápsula Fénix se desplaza es de 1 metro por segundo, demorándose 15 minutos y 40 segundos en hacer un viaje desde el fondo de la mina a la superficie o bien desde la superficie al fondo de la mina. El lapso que transcurre entre el rescate de dos mineros consecutivos, es de 40 minutos.</p> <p>Preguntas.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Qué tipo de relación existe entre el número, N, de mineros rescatados y el tiempo, t, que transcurre en el rescate de los N mineros? Justifique. 2. ¿Qué relación existe entre el tiempo que toma rescatar un minero (viaje desde el fondo de la mina a la superficie) y la velocidad de subida de la cápsula Fénix? Construya un gráfico que represente la relación entre las variables. 3. Si se mantienen invariables los datos entregados en el enunciado, ¿cuánto tiempo tomaría el rescate de los 33 mineros? Justifique. 	<p>Criterios de evaluación</p> <p>Al evaluar, considerar los siguientes criterios:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identifican las relaciones de proporcionalidad entre las variables. • Representan gráficamente la relación de proporcionalidad entre dos variables • Resuelven problemas, utilizando las relaciones de proporcionalidad entre variables.

MATERIAL DE APOYO SUGERIDO

Bibliografía para el docente

- ALEKSANDROV, A. y otros. (1976). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza universidad.
- ALSINA CATALÁ, C. y otros. (1990). *Simetría dinámica*. Síntesis.
- ALSINA CATALÁ, C. y otros. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis.
- ALSINA CATALÁ, C. y otros. *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- ALSINA, BURGUÉS, FORTUNY, GIMÉNEZ y TORRA. (1996). *Enseñar matemáticas*. Madrid: Grao.
- ARAYA S., Roberto y MATUS, Claudia. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- ARGÜELLES RODRÍGUEZ, J. (1989). *Historia de la matemática*. Akal.
- ARIAS, NAFRÍA, DOMÍNGUEZ, SANTISO, DÍEZ, y otros. (1992). *Hoja de Cálculo en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
- ARTIGUE, M. (1994). "Una introducción a la didáctica de la matemática", en *Enseñanza de la Matemática*. Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE.
- ARTIGUE, Michèle y otros. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Iberoamericana.
- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.
- BERLANGA, R. y otros. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. México: Fondo de Cultura Económica.
- BRESSAN, A. M. y otros. (2006). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. México: Novedades Educativas.
- CALLEJO, L. (1994). *Un club de Matemática para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- CEDILLO, T. (1997). *Calculadoras: Introducción al álgebra*. México: Iberoamericana.
- CENTENO, J. (1997). *Números decimales: ¿por qué?, ¿para qué?* Síntesis.
- COFRÉ, A. y TAPIA, L. (1995). *Cómo desarrollar el razonamiento lógico matemático. Manual para kinder a 8º básico*. Santiago: Universitaria.
- CORBALÁN, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.
- D'AMORE, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Colombia: Magisterio.
- DE MELLO E SOUZA, J. C. (Malba Tahan). (2002). *El hombre que calculaba*. Buenos Aires: Limusa.
- DÍAZ, J. y otros. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- DICKSON, L. y otros. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor.
- DUHALDE, M. E. y GONZÁLEZ, M. T. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Argentina: Aique.
- ESCALANTE, M. y otros. (2008). *La matemática de los modelos proporcionales. I medio*. Santiago: Enlaces
- GOÑI, J. M. (coord.). (2000). *El currículo de matemática en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Grao.
- GOVINDEN L., P. (1998). *Introducción a la estadística*. Mc Graw Hill.
- HONSBERGER, R. (1994). *El ingenio en las matemáticas*. Madrid: DLS-Euler.
- JOHSUA, S. y DUPIN, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*, Buenos Aires: Colihue.
- KOSTOVSKY, A. N. (1984). *Construcciones geométricas mediante un compás*. Moscú: Mir.
- MALILA C., G. (1968). *El número de oro. Tomo I: Los ritmos; tomo II: Los ritos*. Buenos Aires: Poseidón.
- MALILA C., G. (1968). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Buenos Aires: Poseidón.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, Matemática*.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. (2004). *Educación matemática. Programa de estudio 8º básico*.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. (2004). *Matemática. Programa de estudio I medio*.
- PLANAS, N. y ALSINA, Á. (2005). *Educación matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Grao.
- Revista UNO. (1997). *Las matemáticas en el entorno*. Barcelona: Grao.
- RODRIGUEZ, J. y otros. (1997). *Razonamiento matemático*. México: Internacional Thompson.
- SAAVEDRA G. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad*. Santiago: Universidad de Santiago.
- SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar matemática hoy*. Argentina: Libros del Zorzal.

SERRANO, J. M. y otros. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemática*. Universidad de Murcia.
VARGAS-MACHUCA, I. y otros. (1990). *Números enteros. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
VILLANUEVA, F. y otros. (1993). *Geometría elemental*. Santiago: Universidad Católica de Chile.
VILLELA, J. (2001). *Uno, dos, tres... geometría otra vez*. Argentina: AIQUE.
WINSTON, H. y ELPHICK, D. (2001). *101 Actividades para implementar los Objetivos Fundamentales transversales*. Lom.

Páginas web recomendadas

Ministerio de Educación de Chile:

www.mineduc.cl

Instrumentos curriculares (Mapas de Progreso, Programas de Estudio, etc.):

www.curriculum-mineduc.cl

Instituto Nacional de Estadísticas:

www.ine.cl

Red Maestros de Maestros (Mineduc):

www.rmm.cl

Sitio Key Currículum Press de textos de matemática:

Geometría:

www.keypress.com/x19850.xml (Ver capítulos de lecciones en español).

Álgebra:

www.keypress.com/x19578.xml (Ver capítulos de lecciones en español).

Textos para el docente y el estudiante educación secundaria México:

www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

Recursos digitales interactivos en la web:

Portal Educar Chile:

www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119

Enlaces:

www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65

Proyecto Descartes, España:

<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/>

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, *applets* de la Universidad de UTAH:

<http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>

Eduteka, Portal Educativo, Colombia:

www.eduteka.org/directorio, luego elegir la carpeta "Matemáticas" o bien desde el enlace directo:

www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=204

Actividades sugeridas por temas: www.eduteka.org/MI/master/interactivate

Bibliografía para el estudiante

- ARGÜELLES RODRÍGUEZ, J. (1989). *Historia de la matemática*. Akal.
- ARIAS, NAFRÍA, DOMÍNGUEZ, SANTISO, DÍEZ, y otros. (1992). *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid,.
- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.
- HONSBERGER, R. (1994). *El ingenio en las matemáticas*. Madrid: DLS-Euler.
- DE MELLO E SOUZA, J. C. (Malba Tahan). (2002). *El hombre que calculaba*. Limusa.
- ARAYA, R. y MATUS, C. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- GOVINDEN, P. (1998). *Introducción a la estadística*. Mc Graw Hill.

Páginas web recomendadas:

Textos para el docente y el estudiante educación secundaria, México:
www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

Recursos digitales interactivos en la web:

Proyecto Descartes, España:
<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php>

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, *applets* de la Universidad de UTAH:

Enlace genérico:

- <http://nlvm.usu.edu/es/nav;>

enlaces directos:

- Números y operaciones:
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_1.html
- Álgebra:
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_2.html
- Geometría:
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_3.html
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_4.html
- Análisis de datos y probabilidad:
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_5.html

Portal Educar Chile:

www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119

Enlaces:

www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65

Eduteka, Portal Educativo, Colombia:

Actividades sugeridas: www.eduteka.org/MI/master/interactivate/

Enlace genérico de las unidades temáticas: www.eduteka.org/directorio; enlaces directos:

- Números y operaciones:
www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=362
- Geometría:
www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=363
www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=364

- Probabilidad y estadística:
www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=365
- Álgebra:
www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=366

Bibliografía CRA

A continuación se detallan publicaciones posibles de encontrar en las bibliotecas de los Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA) a lo largo del país:

Unidad 1

VARIOS AUTORES. Cubos en base dos. Santiago de Chile, s.n., s.f.

Unidad 2

VARIOS AUTORES. Sólidos geométricos, Learning Resources,

Unidad 3

VARIOS AUTORES. Juegos de naipes ingleses, s.d.

Todas las unidades

BLUM, R. (2008). *Festival de ingenio*. Santiago de Chile: RIL.

COLLANTES, J. y PÉREZ, A. (2006). *Matecuentos 3: cuentos con problemas*. Madrid: Nivola Libros.

GARDNER, M. (2008). *El idioma de los espías*. Santiago de Chile: RIL.

MOSCOVICH, I. (2006). *Imaginación geométrica*. México: La Vasija.

SIERRA I FABRA, J. (2000). *El asesinato del profesor de matemáticas*. Madrid: Anaya.

SNAPE, Ch. y SCOTT, H. (2005). *¡Sal si puedes!* México: Limusa.

VARIOS AUTORES. (2007). *Apuntes de matemáticas*. Barcelona: Parramón.

VARIOS AUTORES. (2005). *Usa las matemáticas: soluciona desafíos de la vida real*. Madrid: Alfaguara.

ANEXOS

ANEXO 1: Uso flexible de otros instrumentos curriculares

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el programa de estudio. Estos se pueden usar de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Orientan sobre la progresión típica de los aprendizajes

Mapas de Progreso¹⁴. Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad¹⁵.

Pueden usarse, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se expresa al interior de un curso, ya que permiten:

- caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran los estudiantes de un curso
- reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles

Apoyan el trabajo didáctico en el aula

Textos escolares. Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los alumnos en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Los docentes también pueden enriquecer la implementación del currículum, haciendo uso de los recursos entregados por el Mineduc a través de:

- los **Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA)** y los materiales impresos, audiovisuales, digitales y concretos que entregan
- el **Programa Enlaces** y las herramientas tecnológicas que ha puesto a disposición de los establecimientos

¹⁴ En la página web del Ministerio de Educación se encuentra disponible el documento "**Orientaciones para el uso de los Mapas de Progreso del Aprendizaje**" y otros materiales que buscan apoyar el trabajo con los mapas (www.curriculum-mineduc.cl/ayuda/documentos/).

¹⁵ En una página describen en 7 niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar de la Educación Media es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa para IV° medio que describe el Nivel 6 en cada mapa.

ANEXO 2: Objetivos Fundamentales por semestre y unidad

Objetivo Fundamental	Semestre 1		Semestre 2	
	Unidades:		Unidades:	
	1	2	3	4
1. Establecer estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros.	x			
2. Utilización de estrategias de cálculo que implican el uso de potencias de base entera y exponente natural, determinar y aplicar sus propiedades y extenderlas a potencias de base fraccionaria o decimal positiva y exponente natural.	x			
3. Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas.				x
4. Identificar variables relacionadas en forma proporcional y en forma no proporcional y resolver problemas en diversos contextos que impliquen el uso de la relación de proporcionalidad.				x
5. Caracterizar y efectuar transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, reconocer algunas de sus propiedades e identificar situaciones en contextos diversos que corresponden a aplicaciones de dichas transformaciones.		x		
6. Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos, utilizar los conceptos de perímetro de una circunferencia, área del círculo y de la superficie del cilindro y cono, volumen de cilindros y conos rectos, en la resolución de problemas en contextos diversos.		x		
7. Interpretar información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos y utilizar este tipo de representación para organizar datos provenientes de diversas fuentes.			x	
8. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, ampliando al caso de datos agrupados en intervalos.			x	
9. Comprender el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia en la realización de inferencias, y utilizar medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de una muestra de datos y argumentar acerca de la información que estas medidas entregan.			x	
10. Determinar teóricamente probabilidades de ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.			x	
11. Emplear formas simples de modelamiento matemático, verificar proposiciones simples, para casos particulares, y aplicar habilidades básicas del proceso de resolución de problemas en contextos diversos y significativos, evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones.	x	x	x	x

ANEXO 3: Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad

Contenidos Mínimos Obligatorios	Semestre 1		Semestre 2	
	Unidades:		Unidades:	
	1	2	3	4
NÚMEROS				
1. Empleo de procedimientos de cálculo para multiplicar un número natural por un número entero negativo y extensión de dichos procedimientos a la multiplicación de números enteros.	x			
2. Extensión del algoritmo de la división de los números naturales a la división de números enteros. Discusión y aplicación de dicho algoritmo.	x			
3. Utilización de estrategias de cálculo mental y escrito que implican el uso de potencias de base entera y exponente natural, determinación y aplicación de propiedades relativas a la multiplicación y división de potencias que tienen base entera y exponente natural, y extensión a potencias de base fraccionaria o decimal positiva y exponente natural.	x			
4. Resolución de problemas en contextos diversos y significativos que involucran las 4 operaciones aritméticas con números enteros, potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva y exponente natural, enfatizando en el análisis crítico de los procedimientos de resolución y de los resultados obtenidos.	x			
ÁLGEBRA				
5. Planteamiento de ecuaciones que representan la relación entre dos variables en situaciones o fenómenos de la vida cotidiana y análisis del comportamiento de dichos fenómenos a través de tablas y gráficos.				x
6. Reconocimiento de funciones en diversos contextos, distinción entre variables dependientes e independientes en ellas e identificación de sus elementos constituyentes: dominio, recorrido, uso e interpretación de la notación de funciones.				x
7. Reconocimiento y representación como una función de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre dos variables, en contextos significativos. Comparación con variables relacionadas en forma no proporcional y argumentación acerca de la diferencia con el caso proporcional.				x
8. Análisis de diversas situaciones que representan tanto magnitudes proporcionales como no proporcionales, mediante el uso de software gráfico.				x
9. Resolución de problemas en diversos contextos que implican el uso de la relación de proporcionalidad como modelo matemático.				x
GEOMETRÍA				
10. Realización de traslaciones, reflexiones y rotaciones de figuras geométricas planas a través de construcciones con regla y compás y empleando un procesador geométrico, discusión acerca de las invariantes que se generan al realizar estas transformaciones.		x		
11. Construcción de teselaciones regulares y semirregulares y argumentación acerca de las transformaciones isométricas		x		

utilizadas en dichas teselaciones.				
12. Caracterización de la circunferencia y el círculo como lugares geométricos y su representación mediante lenguaje conjuntista e identificación de sus elementos: arco, cuerda, secante y tangente.		x		
13. Definición del número pi y su relación con el diámetro y la longitud de una circunferencia. Cálculo de la longitud de una circunferencia y estimación del área del círculo por medio de polígonos regulares inscritos en la circunferencia.		x		
14. Formulación de conjeturas relacionadas con el cálculo del volumen del cilindro y cono; cálculo del área de la superficie del cilindro y cono, y verificación, en casos particulares, mediante el uso de un procesador geométrico.		x		
15. Resolución de problemas en situaciones significativas que involucran el cálculo de la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la superficie del cilindro, cono y pirámides y el volumen del cilindro y cono.		x		
DATOS Y AZAR				
16. Resolución de problemas en los cuales es necesario interpretar información a partir de tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, tomados de diversas fuentes o recolectados mediante experimentos o encuestas.			x	
17. Construcción de tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, en forma manual y mediante herramientas tecnológicas, a partir de diversos contextos y determinación de la media aritmética y moda en estos casos.			x	
18. Discusión respecto de la importancia de tomar muestras al azar en algunos experimentos aleatorios para inferir sobre las características de poblaciones, ejemplificación de casos.			x	
19. Análisis del comportamiento de una muestra de datos, en diversos contextos, usando medidas de tendencia central y argumentación acerca de la información que ellas entregan.			x	
20. Análisis de ejemplos en diversas situaciones donde los resultados son equiprobables, a partir de la simulación de experimentos aleatorios mediante el uso de herramientas tecnológicas.			x	
21. Identificación del conjunto de los resultados posibles en experimentos aleatorios simples (espacio muestral) y de los eventos o sucesos como subconjuntos de aquel, uso del principio multiplicativo para obtener la cardinalidad del espacio muestral y de los sucesos o eventos.			x	
22. Asignación en forma teórica de la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio, con un número finito de resultados posibles y equiprobables, usando el modelo de Laplace.			x	

ANEXO 4: Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)

Semestre 1

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 1: Números y álgebra		
1. Establecer estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros.	1	1-2
2. Utilizar estrategias para determinar el valor de potencias de base entera y exponente natural.	2	3
3. Determinar propiedades de multiplicación y división de potencias de base entera y exponente natural.	2	3
4. Verificar qué propiedades de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en potencias de base fraccionaria positiva, decimal positiva y exponente natural.	2	3
5. Resolver problemas que involucren las operaciones con números enteros y las potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva y exponente natural.	1-2-11	1-2-3-4
Unidad 2: Geometría		
1. Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos.	5	10
2. Reconocer algunas propiedades de las transformaciones isométricas.	5	10
3. Construir transformaciones isométricas de figuras geométricas planas utilizando regla y compás o procesadores geométricos.	5	10
4. Teselar el plano con polígonos regulares, utilizando regla y compás o procesadores geométricos.	5	11
5. Utilizar las transformaciones isométricas como herramienta para realizar teselaciones regulares y teselaciones semirregulares.	5	11
6. Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos.	6	12
7. Calcular el perímetro de circunferencias y de arcos de ellas.	6	13
8. Calcular el área del círculo y de sectores de él.	6	13
9. Calcular medidas de superficies de cilindros, conos y pirámides utilizando fórmulas.	6	14
10. Calcular volúmenes de cilindros y conos, utilizando fórmulas.	6	14
11. Resolver problemas en contextos diversos relativos a cálculos de: <ul style="list-style-type: none"> • perímetros de circunferencias y áreas de círculos • áreas de superficies de cilindros, conos y pirámides • volúmenes de cilindros y conos 	6-11	13-14-15

Semestre 2

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 3: Datos y azar		
1. Interpretar información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.	7	16
2. Representar datos, provenientes de diversas fuentes, en tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos.	7	17
3. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, extendiendo al caso de datos agrupados en intervalos.	8	17-19
4. Comprender el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia en la realización de inferencias.	9	18-19
5. Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.	10	20-21-22
Unidad 4: Álgebra		
1. Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos.	4	5
2. Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas.	3	6
3. Identificar variables relacionadas en forma proporcional y en forma no proporcional.	4	7
4. Analizar mediante el uso de softwares gráficos situaciones de proporcionalidad.	4	8
5. Resolver problemas en diversos contextos que implique proporcionalidad directa y problemas que implique proporcionalidad inversa.	4	9