



Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática
Mapa de Progreso de Álgebra



GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática
Mapa de Progreso de Álgebra



GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mapas de Progreso del Aprendizaje

Álgebra

Material elaborado por la Unidad de Currículum, UCE.

www.curriculum-mineduc.cl

ISBN: 978-956-292-224-1

Registro de Propiedad Intelectual N° 179.841

Alameda 1371, Santiago.

Ministerio de Educación.

Se agradece a los profesores y profesoras de los siguientes establecimientos que colaboraron en el proceso de recolección de trabajos de alumnos y alumnas:

Alianza Francesa - Vitacura

Alcántara de la Florida - La Florida

Alicante del Rosal - Maipú

Colegio Albert Einstein - La Serena

Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez - Puente Alto

Colegio La Misión - Calera de Tango

Colegio Municipal Juan Pablo Duarte - Providencia

Colegio Nuestra Señora de Andacollo - Santiago

Colegio Notre Dame - Peñalolén

Colegio Oratorio Don Bosco - Santiago

Colegio Pedro de Valdivia - Macul

Colegio Sagrado Corazón - Talagante

Colegio Sagrados Corazones - Santiago

Colegio Saint George - Vitacura

Colegio San Alberto Magno - La Florida

Colegio San Ignacio Alonso Ovalle - Santiago

Colegio Santa Cruz - Santiago

Escuela Antártica Chilena - Vitacura

Escuela Básica N° 10 Miguel de Cruchaga Tocornal - Puente Alto

Escuela Experimental de Música Jorge Peña Hen - La Serena

Instituto Alonso de Ercilla - Santiago

Instituto Nacional José Miguel Carrera - Santiago

La Girouette - Las Condes

Liceo San Alberto Hurtado - Quinta Normal

Liceo Antonio Hermida Fabres - Peñalolén

Liceo Leonardo Murialdo - Recoleta

Liceo Confederación Suiza - Santiago

Liceo Manuel de Salas - Ñuñoa

Liceo Municipal A-73 Santiago Bueras y Avaria - Maipú

Liceo Santa María - Santiago

Liceo Ruiz Tagle - Estación Central

Diseño y diagramación: Designio

Imprenta: Valente

Marzo de 2009

Mapas de Progreso del Aprendizaje

El documento que se presenta a continuación es parte del conjunto de Mapas de Progreso del Aprendizaje, que describen la secuencia típica en que este se desarrolla, en determinadas áreas o dominios que se consideran fundamentales en la formación de cada estudiante, en los distintos sectores curriculares. Esta descripción está hecha de un modo conciso y sencillo para que todos puedan compartir esta visión sobre cómo progresa el aprendizaje a través de los 12 años de escolaridad. **Se busca aclarar a los profesores y profesoras, a los alumnos y alumnas y a las familias, qué significa mejorar en un determinado dominio del aprendizaje.**

Los Mapas complementan los actuales instrumentos curriculares (Marco Curricular de OF/CMO y Programas de Estudio) y en ningún caso los sustituyen. Establecen una relación entre currículum y evaluación, orientando lo que es importante evaluar y entregando criterios comunes para observar y describir cualitativamente el aprendizaje logrado. No constituyen un nuevo currículum, ya que no promueven otros aprendizajes; por el contrario, pretenden profundizar la implementación del currículum, promoviendo la observación de las competencias clave que se deben desarrollar.

Los Mapas describen el aprendizaje en 7 niveles, desde 1° Básico a 4° Medio, con la excepción de Inglés, que tiene menos niveles por comenzar su enseñanza en 5° Básico.

Cada nivel está asociado a lo que se espera que los estudiantes hayan logrado al término de determinados años escolares. Por ejemplo, el nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° Básico; el nivel 2 corresponde al término de 4° Básico y así sucesivamente cada dos años. El último nivel (7) describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar es “sobresaliente”, es decir, va más allá de la expectativa que se espera para la mayoría que es el nivel 6. No obstante lo anterior, la realidad muestra que en un curso coexisten estudiantes con distintos niveles. Por esto, lo que se busca es ayudar a determinar dónde se encuentran en su aprendizaje y hacia dónde deben avanzar, y así orientar las acciones pedagógicas de mejoramiento.

Matemática

El currículum de Matemática tiene como propósito que los alumnos y alumnas adquieran los conocimientos básicos de la disciplina, a la vez que desarrollen el pensamiento lógico, la capacidad de deducción, la precisión, las capacidades para formular y resolver problemas y las habilidades necesarias para modelar situaciones o fenómenos. La construcción de la Matemática surge de la necesidad de responder y resolver desafíos provenientes de los más variados ámbitos del quehacer humano y de la Matemática misma; su construcción y desarrollo es una creación ligada a la historia y la cultura.

Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo de un pensamiento propio y autónomo. El modelamiento matemático de la realidad, mediante el uso apropiado de conceptos, relaciones entre ellos y procedimientos matemáticos, ayuda al estudiante a comprender situaciones y fenómenos, y le permite formular explicaciones y hacer predicciones de ellos, aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad.

Mapa de Progreso del Aprendizaje de Álgebra

Los aprendizajes de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso:

- **Números y Operaciones**, describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucran distintos tipos de números.
- **Álgebra**, describe el progreso de la capacidad para utilizar símbolos en la representación de generalidades y el modelamiento de situaciones y fenómenos así como también el desarrollo de la argumentación matemática.
- **Geometría**, describe el progreso de las competencias relacionadas con la comprensión, medición y el modelamiento de las formas, las transformaciones, la posición y el espacio.
- **Datos y Azar**, describe el progreso de las habilidades para organizar y representar información disponible, para describir y analizar situaciones, hacer interpretaciones de sucesos en los que interviene el azar y la incertidumbre.

El **Razonamiento Matemático** constituye una dimensión que es abordada transversalmente en estos cuatro Mapas de Progreso.

Los aprendizajes descritos en el Mapa de Progreso de **Álgebra** progresan considerando tres dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

- a. **Comprensión y uso del lenguaje algebraico.** Se refiere a las habilidades para interpretar el significado y escribir expresiones algebraicas haciendo uso de las convenciones del álgebra, representarlas de diversas maneras y usarlas en la designación de números, variables, constantes u otros objetos matemáticos.
- b. **Comprensión y uso de relaciones algebraicas.** Se refiere a la habilidad para establecer relaciones entre expresiones simbólicas mediante igualdades, ecuaciones, inecuaciones o funciones y a la capacidad para aplicar reglas y procedimientos que permitan transformarlas en expresiones equivalentes.
- c. **Razonamiento Matemático.** Involucra habilidades relacionadas con el reconocimiento y descripción de regularidades, el modelamiento de situaciones o fenómenos y la argumentación matemática.

Elementos claves del Mapa de Álgebra

El álgebra ocupa un lugar de privilegio en la enseñanza de la matemática actual, siendo reconocida y valorada, no solo por matemáticos sino también por especialistas de otras disciplinas científicas, como una poderosa herramienta que permite representar y manipular símbolos, constituyéndose así en un lenguaje formal con el cual se puede describir generalizaciones, modelar situaciones de diversos ámbitos y demostrar conjeturas. A lo anterior se suma su innegable aporte al desarrollo del pensamiento abstracto y el razonamiento lógico.

La figuración del eje de álgebra desde 5° Básico en el ajuste curricular propuesto para el sector, no excluye de ninguna manera la observación temprana del desarrollo de habilidades tales como, la identificación de regularidades de los números y figuras geométricas, el reconocimiento de un símbolo como valor desconocido, la interpretación de relaciones y propiedades conocidas de los números descritas en lenguaje simbólico y la justificación de procedimientos. Estas capacidades, tradicionalmente inmersas en los contextos numéricos o geométricos, pueden ser analizadas con una mirada algebraica, constituyéndose de esta forma en valiosos elementos de pre-álgebra que conformarán la base para el desarrollo del pensamiento algebraico futuro. De esta forma,

el mapa de álgebra describe la progresión desde el nivel uno al siete, intencionando en los dos primeros niveles, la observación de las habilidades descritas anteriormente.

El Razonamiento Matemático en el Mapa de Álgebra, se refiere tanto al trabajo con modelos simples de situaciones y fenómenos tanto de la cotidianidad como de la propia disciplina como al desarrollo de la capacidad de argumentación usando herramientas matemáticas. Es de esta forma como en los primeros niveles se aprecia un énfasis en la detección de regularidades y en la búsqueda de reglas que las generen, para dar paso posteriormente a la representación de situaciones por medio de ecuaciones o el uso de relaciones de proporcionalidad. Finalmente el razonamiento algebraico en los últimos niveles está marcado por la modelación de situaciones para resolver problemas diversos y argumentar la validez de proposiciones usando procedimientos y herramientas matemáticas. En este documento el término “modelamiento” se refiere al proceso mediante el cual un problema en particular es descrito utilizando lenguaje simbólico, posteriormente se resuelve empleando las herramientas propias de la disciplina y luego se entrega su respuesta en el contexto que originalmente se encontraba el problema. El describir un problema usando lenguaje simbólico, implica detectar en él, tanto aquellos elementos claves que permiten una adecuada representación como las relaciones existentes entre ellos; este proceso implica, por lo general, realizar supuestos que permitan describir de manera simple el problema en cuestión.

En las páginas siguientes se encuentra el Mapa de Progreso de Álgebra. Comienza con una presentación sintética de todos los niveles. Luego se muestra en detalle cada nivel, partiendo por su descripción, algunos ejemplos de desempeño que ilustran cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje, y uno o dos ejemplos de trabajos realizados por alumnos y alumnas de diversos establecimientos, con los comentarios que justifican por qué se juzga que el trabajo del estudiante se encuentra “en” el nivel. En un anexo se incluye la versión completa de las tareas a partir de las cuales se recolectaron los trabajos de los estudiantes.

En la mayor parte de los casos estas tareas fueron diseñadas para ser desarrolladas por los alumnos y alumnas en el aula, durante una hora de clases, y considerando que pudieran ser reproducidas en un documento impreso. Varias tareas demandaron que los alumnos y alumnas desarrollaran diversos pasos, de ellos se ha incorporado en el documento aquel que ilustra un desempeño más expresivo del nivel.

Mapa de Progreso de Álgebra



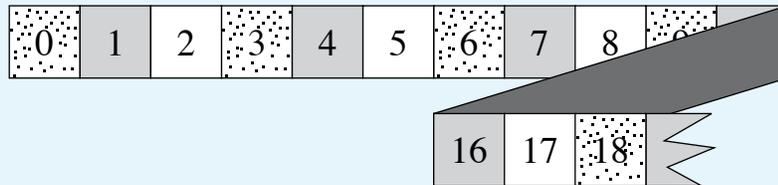
Nivel 1

Comprende que el signo igual representa una igualdad entre dos expresiones y reconoce que símbolos no numéricos pueden representar valores numéricos. Determina el valor desconocido en situaciones de adición y sustracción. Continúa el desarrollo de patrones numéricos y geométricos, dada la regla que lo genera. Fundamenta su respuesta en la determinación de un valor desconocido aludiendo al concepto de igualdad y da razones de por qué un término numérico pertenece o no a una secuencia refiriéndose a una regla dada.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño.

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Explica que en una igualdad que contiene dos términos en ambos lados, el valor numérico de las dos expresiones tiene que ser el mismo. Por ejemplo: en la igualdad $5 + 3 = \heartsuit + 2$, señala que si $5 + 3$ es 8, entonces $\heartsuit + 2$ debe ser 8.
- Encuentra números que satisfacen una igualdad que involucra adiciones o sustracciones entre términos. Por ejemplo: Encuentra valores para \square y \heartsuit que satisfacen $\square + 7 = \heartsuit + 3$.
- Determina el valor del término desconocido en una igualdad que involucra adiciones o sustracciones entre términos. Por ejemplo: determina el valor de Δ , \heartsuit y \square en las expresiones $7 + \Delta = 11$, $7 + 15 = 20 + \heartsuit$, y $10 = \square - 3$.
- Determina el valor de una expresión que involucra adición o sustracción, conocido el valor de un símbolo. Por ejemplo: conocido el valor de \heartsuit , determina el valor de la expresión $\heartsuit + 12$.
- Fundamenta si valores desconocidos en igualdades pertenecen a una secuencia numérica de acuerdo a una regla dada. Por ejemplo: fundamenta si el valor de \heartsuit que satisface la igualdad $18 = \heartsuit + 3$ pertenece a la secuencia de los números pares.
- Determina valores desconocidos en secuencias numéricas. Por ejemplo: se pintan los casilleros de la cinta de la figura siguiendo la regla: "punteado, gris, blanco y así sucesivamente". Según la regla anterior, determina en qué tipo de casilla quedará el número 13.



- Determina si un elemento pertenece a una o más secuencias con una regla dada.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- La tarea:**

A los alumnos y alumnas se les pide conocer el valor de la suma de dos símbolos, el primero de valor conocido y el segundo, de valor desconocido, pero ligado al primero a través de una igualdad, tal como se muestra a continuación:

$$\text{Si } \text{cruz} = 300 \text{ y}$$

$$400 + \text{cruz} = \text{círculo}$$

$$\text{¿Cuánto es } \text{cruz} + \text{círculo} ?$$

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

Comentario: El estudiante demuestra que comprende que un símbolo puede representar un determinado valor numérico al escribir el número 300 en la "cruz" y al utilizarlo para determinar el valor de círculo. Además, lo deja en evidencia cuando escribe 700 en el círculo para calcular el valor de la expresión dada. Con esto demuestra que puede determinar el valor de una incógnita en una situación aditiva sencilla.

$$400 + \text{cruz} = \text{círculo}$$

$$\text{cruz} + \text{círculo} = 1000$$

Nivel 2

Expresa relaciones de orden utilizando la simbología correspondiente. Determina el valor desconocido en situaciones de multiplicación y división. Identifica, describe y continúa patrones numéricos y geométricos con figuras conocidas, mencionando alguna regla que genere la secuencia. Explica las estrategias aplicadas en la determinación de un valor desconocido y justifica la regla elegida para continuar un patrón aludiendo a los términos dados.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño.

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Utiliza los signos < (menor que), = (igual) o > (mayor que) para comparar magnitudes. Por ejemplo: las edades de sus compañeros y compañeras de clase.
- Determina el valor desconocido en igualdades que involucran multiplicación o división entre términos. Por ejemplo: indica qué número está tapado por \square en la expresión $80 = 8 \cdot \square$.
- Utiliza propiedades para expresar igualdades en distinta forma. Por ejemplo: expresa $15 = \square \cdot 5$ en la forma $5 \cdot \square = 15$.
- Verifica la conmutatividad de la multiplicación en los números naturales. Por ejemplo: utilizando distintos valores de \square verifica que $3 \cdot \square = \square \cdot 3$.
- Identifica reglas que generan secuencias numéricas. Por ejemplo: describe una regla que pueda ser usada para generar la secuencia 2, 3, 5, 8, 12...
- Identifica una regla de formación que genera una secuencia de figuras geométricas. Por ejemplo: determina una regla que genera las siguientes figuras y según esa regla dibuja la próxima figura.

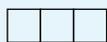


Figura 1

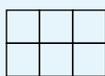


Figura 2

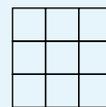


Figura 3

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

• **La tarea:**

A los alumnos y alumnas se les presentó una situación en donde Jaime está ordenando su colección de autos. Ubica 1 auto en el primer estante, 3 autos en el segundo estante, 7 autos en el tercer estante y 15 autos en el cuarto estante.

Se les pide a los estudiantes determinar:

¿Cuál puede ser una de las reglas que sigue el patrón?

Considerando la regla que descubriste, ¿cuántos autos pondrá Jaime en el quinto estante?

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

a. ¿Cuál puede ser una de las reglas que sigue el patrón?

Handwritten student work for part a. It shows four addition problems:

$$1^o \quad 1$$

$$2^o \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$3^o \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$4^o \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 2 \\ + 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

Below these is the handwritten rule: *tomar la cantidad anterior y sumarle el sucesor*

b. Considerando la regla que descubriste, ¿cuántos autos pondrá Jaime en el quinto estante?

Handwritten student work for part b. It shows 5^o and an addition problem:

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 15 \\ \hline 31 \end{array}$$

Comentario: En la pregunta "a", el estudiante identifica y describe una regla que genera el orden con el cual Jaime ordena sus autos en el estante y relaciona la cantidad de autos versus el estante donde los guarda. Muestra en este ordenamiento que la cantidad de autos que pone en cada estante se obtiene por medio de la adición entre el número anterior y el sucesor de éste. Luego en "b", aplica la regla descubierta para determinar el número que continúa en la secuencia.

Nivel 3

Comprende que en las expresiones algebraicas las letras pueden representar distintos valores de acuerdo al contexto. Reconoce las expresiones algebraicas que representan las propiedades de las operaciones e interpreta expresiones algebraicas que representan la generalización de una operación matemática. Comprende que una misma expresión tiene distintas representaciones algebraicas equivalentes. Resuelve ecuaciones de primer grado donde la incógnita se encuentra a un solo lado de la igualdad, utilizando estrategias informales. Justifica sus soluciones explicitando las estrategias utilizadas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño.

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Señala que el valor de una misma letra puede variar en contextos distintos. Por ejemplo: explica que en $x + 5 = 8$ el valor de la incógnita es distinto al valor en $x - 10 = 15$.
- Identifica propiedades de las operaciones escritas en lenguaje simbólico. Por ejemplo: identifica $a + b = b + a$ como una expresión que representa a la propiedad conmutativa de la adición y $a \cdot b = b \cdot a$ como una expresión que representa la conmutatividad en la multiplicación.
- Identifica fórmulas geométricas expresadas algebraicamente. Por ejemplo: identifica $P = a \cdot l$; como una expresión que puede representar el perímetro de cualquier cuadrado de lado "l".
- Escribe expresiones equivalentes a una dada. Por ejemplo: escribe $3m$ como $3 \cdot m$, $m + m + m$, $\frac{3m}{1}$, $\frac{6m}{2}$, etc.
- Valora expresiones algebraicas. Por ejemplo: dada la expresión $A = \frac{b \cdot h}{2}$ que representa el área de un triángulo, determina el valor de A , conocidos los valores de b y h .
- Determina el valor desconocido en ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por ejemplo: determina la cantidad de kilómetros "k" recorridos por un auto, conocido el tiempo y la rapidez.
- Valora expresiones utilizando información presente en ecuaciones de primer grado. Por ejemplo: valora la expresión $6m + 7$, donde la variable m está presente en la ecuación $5 + 2m = 8$.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- La tarea:**

A cada estudiante se le presentó la siguiente situación:

Camilo acompaña a su mamá al supermercado a comprar 6 kilogramos de azúcar; ella le cuenta que el precio de 2 kilogramos de azúcar más \$500 da un total de \$1.450.

Camilo llama x al precio de 1 kilogramo de azúcar y plantea la ecuación $2x + 500 = 1.450$, pero no puede resolverlo.

Se les pidió a los alumnos y alumnas resolver la ecuación dada y comprobar el resultado obtenido.

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

1. Ayuda a Camilo y resuelve tú la ecuación.

$$2x + 500 = 1450 = 950 + 500 \quad x = 475$$

$$= 2 \cdot 475 + 500$$

2 un kilogramo de azúcar vale 475.

2. ¿Cómo podrías comprobar que el número que obtuviste es solución de la ecuación?

Se reemplaza 475 en $2x + 500 = 1450$

$$2 \cdot 475 + 500 =$$

$$\begin{array}{r} \checkmark \\ 950 + 500 = \\ \checkmark \\ 1450 \end{array}$$

Comentarios: Identifica la ecuación y utiliza una estrategia informal que consiste en descomponer 1.450, en 500 y "algo más" que asocia a $2x$. Luego para encontrar el valor de x , descompones multiplicativamente 950 como $2 \cdot 475$. A través del uso de líneas, hace visible las relaciones que establece entre los términos de ambos lados de la ecuación.

Luego utiliza el valor obtenido de " x " y lo reemplaza en la ecuación original para verificar la igualdad.

Nivel 4

Traduce expresiones desde el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Reduce expresiones algebraicas por medio de la aplicación de propiedades de las operaciones. Resuelve problemas en diferentes contextos que involucran ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos lados de la igualdad, utilizando propiedades y convenciones del álgebra. Reconoce funciones en contextos cotidianos y sus elementos constituyentes, distinguiendo entre variables independientes y dependientes. Resuelve problemas que involucran aplicar el modelo de variación proporcional, explicando la relación entre las variables. Justifica la pertinencia de los procedimientos aplicados aludiendo a la situación que modela.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ◉ Formula en lenguaje algebraico la expresión o ecuación que representa un problema o situación expresada en lenguaje natural. Por ejemplo: Formula la ecuación que permite determinar la edad que tiene Rocío en la actualidad sabiendo que en 12 años más tendrá el doble de la edad de su hermana de 6 años, como: $x + 12 = 2 \cdot (6 + 12)$.
- ◉ Explica en lenguaje natural el significado de una expresión algebraica. Por ejemplo, en un contexto específico, explica que la expresión $3 \cdot (x + 1)$ representa el triple del sucesor de un número.
- ◉ Resuelve expresiones que contienen paréntesis y reduce términos semejantes manualmente o mediante el uso de un procesador simbólico.
- ◉ Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita en forma manual y usando un procesador simbólico. Por ejemplo: resuelve la ecuación $13 - 3x = 2 \cdot (x - 1)$.
- ◉ Diferencia entre situaciones de variación proporcional y no proporcional. Por ejemplo: menciona que el tamaño de un árbol no es proporcional a la cantidad de años que éste tenga.
- ◉ Identifica relaciones de proporcionalidad directa entre dos variables en diversas situaciones. Por ejemplo: identifica que el consumo de electricidad de una estufa eléctrica es directamente proporcional al tiempo que se encuentra encendida.
- ◉ Identifica relaciones de proporcionalidad inversa entre dos variables en diversas situaciones. Por ejemplo: Identifica que el tiempo de llenado de una piscina es inversamente proporcional a la cantidad de litros por minuto de agua que se viertan en ella.
- ◉ Identifica dominio y recorrido de una función, representada mediante una tabla de valores o una gráfica.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

• **La tarea:**

Se les pide a los alumnos y alumnas determinar si cada uno de los siguientes casos corresponde a una situación de proporcionalidad, justificando su respuesta.

Caso 1: El área de un cuadrado cualquiera versus la longitud de uno de sus lados
(Área = Lado²).

Caso 2: La estatura de una persona versus su edad.

Caso 3: La cantidad de pan a comprar versus el precio a pagar.

Comentario: Señala, en cada caso, cuando las variables están relacionadas proporcionalmente o no. En el primero descubre que la relación no es proporcional a partir de la aplicación de la propiedad fundamental de las proporciones. En el segundo caso por conocimiento experiencial sabe que no existe una constante de proporcionalidad entre la estatura y la edad de las personas, lo que deja de manifiesto cuando señala que "una persona de x años no mide x · m". En el tercero descubre que la relación es proporcional nuevamente a partir de la aplicación de la propiedad fundamental de las proporciones.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

1)

a ²	Lado
4	2
16	4
64	8
225	15
400	20

comparar (propiedad fundamental)
 $\frac{4}{16} ; \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{4}{4} \Rightarrow 1 \cdot 2 \neq 4 \cdot 1$
 $\frac{64}{400} ; \frac{8}{20} \Rightarrow \frac{4 \cdot 2}{20} = \frac{400}{2000} \Rightarrow 4 \cdot 20 \neq 2 \cdot 400$

• El área del cuadrado no es proporcional a su lado, porque el producto de los medios, no es igual al producto de sus extremos.

2) Una persona de x años no mide x m; debido a que las personas no crecen proporcionalmente. Una persona no vive todos los años.

3)

kg	\$
1	700
2	1400
10	7000
25	17500

comparar:
 $\frac{1}{700} ; \frac{10}{7000} \Rightarrow \frac{1 \cdot 7000}{700} = \frac{10 \cdot 700}{7000}$
 $1 \cdot 7000 = 10 \cdot 700$

• La cantidad a pagar es proporcional a la cantidad que compro.

Nivel 5

Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones lineal, afín, exponencial, logarítmica y raíz cuadrada, y las representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Transforma expresiones algebraicas de forma entera y fraccionaria haciendo uso de convenciones del álgebra. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales en forma algebraica y gráfica. Resuelve problemas que involucran composición de funciones, modelos lineales y afines o sistemas de ecuaciones lineales. Justifica la pertinencia del modelo aplicado y de las soluciones obtenidas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⦿ Representa gráficamente la función lineal o afín conocida su representación algebraica, en forma manual o usando un software.
- ⦿ Representa algebraicamente funciones lineales o afines. Por ejemplo: Una expresión que permita encontrar la cantidad de dinero a pagar en un parque de diversiones donde la entrada cuesta \$1.800 y cada juego a los que se sube una persona vale \$180.
- ⦿ Identifica situaciones donde hay una relación lineal o afín entre las variables. Por ejemplo: Indica que la relación entre el valor de la cuenta de la electricidad y el consumo puede ser representada por un modelo lineal o afín.
- ⦿ Determina los valores numéricos que indefinen una expresión algebraica fraccionaria. Por ejemplo: Determina los valores que indefinen la expresión $\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 5x + 3}$.
- ⦿ Simplifica expresiones algebraicas fraccionarias que contienen binomios en el numerador o denominador. Por ejemplo: $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab}$ cuando $a \neq -b$.
- ⦿ Realiza adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas escritas en forma de fracción.
- ⦿ Determina la existencia y pertinencia de soluciones de un sistema de ecuaciones de primer grado de acuerdo a un contexto dado.
- ⦿ Utiliza un software para determinar si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una, infinitas o no tiene solución.
- ⦿ Determina la función que se obtiene a partir de la composición de dos funciones dadas. Por ejemplo: dada $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 3x + 2$ determina $(f \circ g)(x) = 3x + 3$.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

• **La tarea:**

A los alumnos y alumnas se les presentó una situación de una fábrica de helados en la que se disponían a modificar las remuneraciones de los vendedores.

Opción 1: Una remuneración base de \$250.000, más un 0,6 % de comisión por ventas, donde el precio de una unidad de helado es de \$84.

Opción 2: Se calcula el sueldo mediante la expresión $y = 0,7x + 220.000$, donde x representa el total de helados vendidos en un mes y y representa el sueldo recibido por el vendedor.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

1. Si en un mes cualquiera la venta de helados es nula, determina cuánto dinero ganaría un vendedor al elegir la opción 1 y al elegir la opción 2.

Comentario: Al plantear la ecuación para la opción 1, demuestra que comprende que el problema puede ser resuelto modelando la opción 1 como una función afín. Y, resuelve el problema determinando los valores de cada ecuación.

Option 1) $y = 250.000 + \frac{0,6}{100}(x - 84)$ Si la venta es nula $x=0$, el vendedor recibe un sueldo de \$ 250.000

Option 2) $y = 0,7x + 220.000$. Si la venta es nula $x=0$, el vendedor recibe un sueldo de \$ 220.000

2. ¿Cuál es la opción que más le conviene a un vendedor si en promedio vende 40.000 helados? Justifica.

Option 1) $y = 250.000 + \frac{0,6}{100}(40.000 - 84)$ $y = 250.000 + 20160 = 270.160$

Option 2) $y = 0,7 \cdot 40.000 + 220.000 = 288.000$

La opción que más le conviene es la opción 2.

Nivel 6

Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadrática y potencia, las caracteriza y representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Distingue funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Representa e interpreta de diversas formas las soluciones de inecuaciones y sistemas de inecuaciones. Resuelve ecuaciones de segundo grado e inecuaciones de primer grado identificando el conjunto al cual pertenecen sus soluciones. Resuelve problemas que pueden ser modelados por medio de las funciones potencia y cuadrática. Elabora estrategias de resolución, las desarrolla y justifica usando lenguaje algebraico.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño.

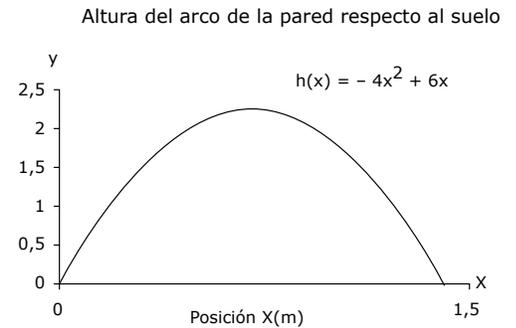
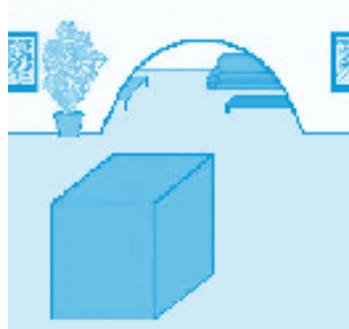
Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⊙ Expresa de diferentes maneras la solución de una inecuación lineal. Por ejemplo: Expresa el conjunto solución de la inecuación $2x + 3 > 5$ como el intervalo $]1, \infty[$ o como el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$ y gráficamente.
- ⊙ Conjetura sobre las distintas representaciones gráficas de la función cuadrática a partir de la variación de sus parámetros y verifica sus conjeturas haciendo uso de un software gráfico.
- ⊙ Dada una ecuación de segundo grado, determina si sus soluciones pertenecen al plano real o complejo.
- ⊙ Resuelve problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, analizando la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo al contexto del problema. Por ejemplo: descarta soluciones negativas en ecuaciones donde la incógnita representa longitudes.
- ⊙ Determina la cantidad de soluciones reales de una ecuación cuadrática a través de su representación gráfica, en forma manual o haciendo uso de un software. Por ejemplo: determina la cantidad de soluciones reales de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ usando un software.
- ⊙ Resuelve problemas que involucren sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.
- ⊙ Resuelve problemas que involucran funciones de segundo grado. Por ejemplo: Determina la altura máxima que alcanza cierto proyectil cuando es lanzado verticalmente con una velocidad inicial dada.
- ⊙ Determina si una función dada es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva de acuerdo a su dominio de definición. Por ejemplo: determina que $f(x) = x^2$ es biyectiva en \mathbb{R}^+ pero no en \mathbb{R} .

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:** A los alumnos y alumnas se les muestra una situación donde Fabiola en su casa desea trasladar desde la sala de descanso hasta el living una caja que en su interior tiene un fino piano, y cuyas dimensiones son:
 - Ancho: 1,0 m.
 - Alto: 1,2 m. y
 - Profundidad: 2,2 m.

Para trasladarla debe hacerla pasar por un arco de una pared que tiene la forma de una parábola. Para evitar posibles daños del piano, Fabiola determinará previamente si la caja pasará hasta el living, ya que la función que describe el arco de la división es conocida.



• Ejemplo de trabajo en el nivel »

1. Determina si Fabiola pudo pasar la caja desde la sala de descanso al living a través de este arco de la pared. Escribe los cálculos que justifican tu respuesta. Usa una calculadora si es necesario.

Comentario: Resuelve una situación problema estableciendo una ecuación cuadrática. Elabora una estrategia que implica:

Representar el problema mediante un esquema.

Identificar los datos del problema e integrarlos a su representación.

Establecer y resolver la ecuación $1,2 = -4x^2 + 6x$ para determinar el ancho que puede tener la caja para pasar por el arco, a partir de la diferencia entre las raíces de la ecuación resultante $1,26 - 0,24 = 1,02$.

Comparar el ancho obtenido del arco con el ancho de la caja para determinar que la caja puede pasar.

En el desarrollo de cada uno de los pasos evidencia manejo del lenguaje algebraico.

$h(x) = -4x^2 + 6x$
 Entre 1,26 y 0,24 hay 1,02 metros que sería el ancho y el ancho de la caja es de 1,02 por ello, la caja pasará.
 $1,2 = -4x^2 + 6x$
 $4x^2 - 6x + 1,2 = 0$
 $2x^2 - 3x + 0,6 = 0$
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(0,6)}}{4}$
 $x = \frac{3 \pm 2,05}{4}$
 $x_1 = 1,26$
 $x_2 = 0,24$
 Aquí se obtiene el mínimo de alto necesario

Nivel 7 Sobresaliente

Interpreta y usa convenciones del álgebra para representar generalizaciones y relaciones entre números, variables, funciones u otros objetos matemáticos estableciendo nuevas representaciones algebraicas de un nivel de abstracción mayor. Muestra autonomía y flexibilidad en la transformación de expresiones simbólicas escribiendo, reconociendo y eligiendo formas equivalentes de distintas representaciones algebraicas. Modela situaciones o fenómenos provenientes de diversos contextos y utiliza argumentos y propiedades matemáticas para demostrar proposiciones.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

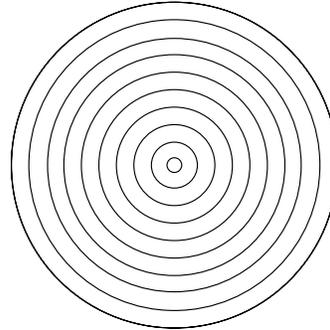
Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⦿ Conjetura sobre la representación gráfica de una función a partir de la observación de su representación algebraica.
- ⦿ Convierte una expresión algebraica en otra equivalente en términos de la conveniencia en la solución de un problema. Por ejemplo: simplifica una fracción algebraica para reducir las expresiones antes de operar con ellas.
- ⦿ Modela situaciones provenientes de contextos reales. Por ejemplo: Escribe la ecuación que mejor represente los resultados obtenidos al medir la temperatura de una taza de agua caliente en intervalos iguales de tiempo.
- ⦿ Deduce fórmulas relativas a funciones en contextos físicos. Por ejemplo: deduce la fórmula para determinar el punto máximo que alcanza un proyectil cuando es lanzado con una velocidad cuyos componentes en los ejes coordenados son conocidos.
- ⦿ Aplica modelos en contextos diversos. Por ejemplo: aplica modelos poblacionales para estimar poblaciones de individuos en determinados tiempos.
- ⦿ Realiza demostraciones en contextos algebraicos. Por ejemplo: demuestra que $36a^2 + 9b^2 + 4c^2 \geq 36ab + 12bc - 24ac$ para números reales a, b, c cualesquiera.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

• **La tarea:**

A los alumnos y alumnas se les mostró la siguiente imagen donde el radio de la circunferencia menor es de igual medida que la separación entre cada una de las circunferencias concéntricas.



Se pide a los estudiantes determinar la expresión algebraica que representa el área del círculo número k , dejando registrados todos sus cálculos ordenadamente.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

Comentario: Establece una simbología propia utilizando convenciones del álgebra para generar nuevas representaciones y formas de lenguaje que modelan de mejor manera la situación problema. Establece relaciones entre distintos elementos variables y usa un lenguaje simbólico para fundamentar su respuesta. Para esto, parte de lo más simple, el primer círculo, hasta establecer una generalización que lo lleva a escribir la fórmula general que permite determinar el área del círculo número "k".

- $O_1 = R$
 - $O_2 = R_2 = 2R$ del O_1
 - $O_3 = R_3 = 3R$ del O_1
 - $O_4 = R_4 = 4R$ del O_1
 ...
 ↓
 ↳ O_k - Su radio es k veces el radio del O_1
 - $O_k = R_k = kR$ del O_1

• Expresión:
 Área del $O_k = (k \cdot R)^2 \cdot \pi$
 ↓
 $A_{O_k} = (k \cdot R)^2 \cdot \pi$

• Simbología:
 + O = circunferencia
 + k = número "X" de la circunferencia.
 + R = Radio

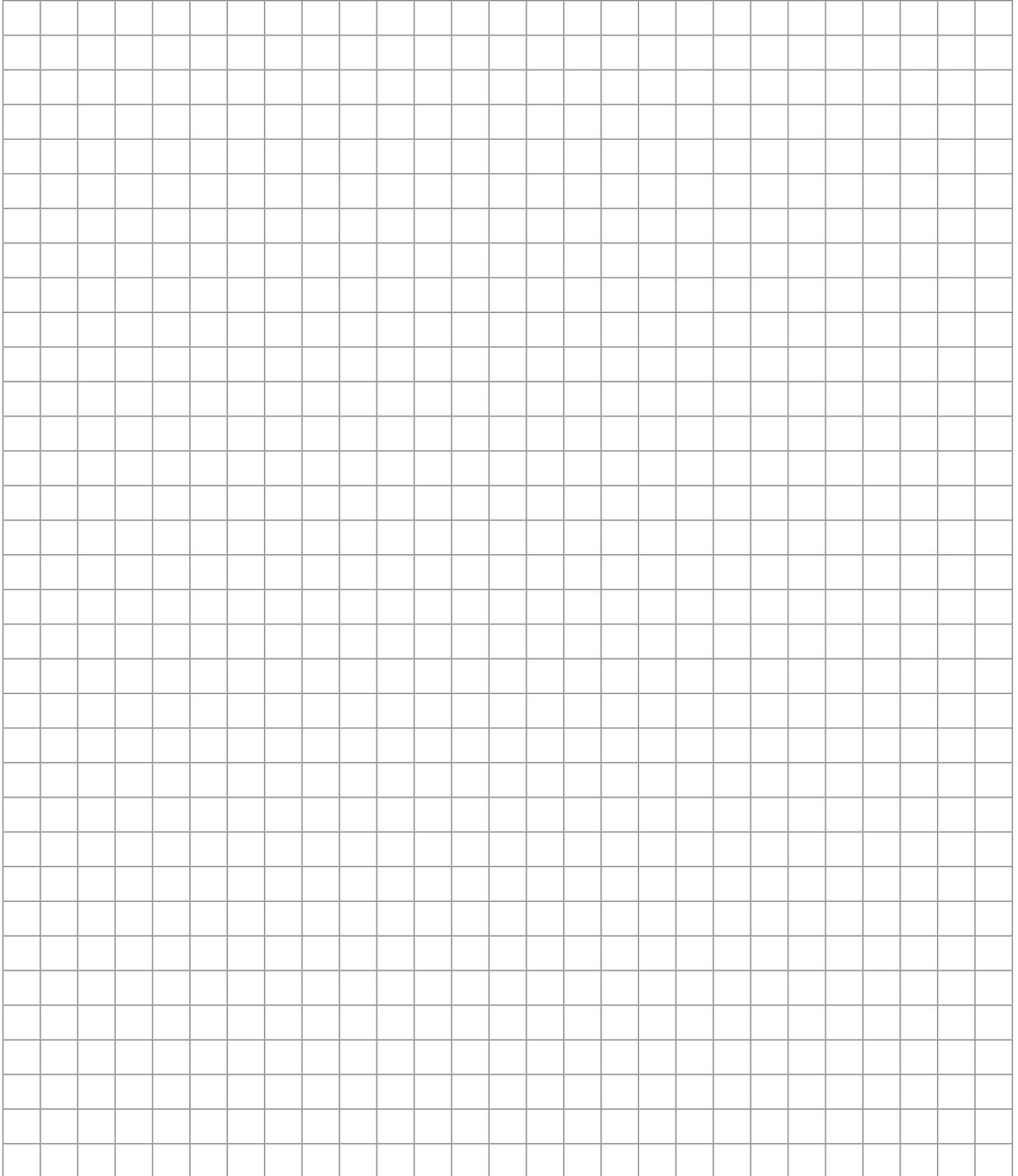
Anexos

Tareas Aplicadas
por Nivel

 Anexo

Nivel 6 / Tareas Aplicadas

2. ¿Es posible pasar la caja del piano en otra posición? Justifica. Usa una calculadora si es necesario.



Mapas de Progreso del Aprendizaje



GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN